Steffen Koenig
Qunhua Liu

Montag, 23. Mai 2011
Aufgabenblatt 5

Übungen zur Vorlesung Algebra

zur Diskussion: Gegeben sind Ringe R, S, T, wobei S ein Teilring von R ist und $T = R/I$ ein Quotient, wobei die Quotientenabbildung $R \to T$ mit φ bezeichnet wird und die Inklusion von S in R mit ι. Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch?

(1) J Hauptideal in $S \Rightarrow \iota(J)$ Hauptideal in R.
(2) J Hauptideal in $R \Rightarrow J \cap S$ Hauptideal in S.
(3) J Hauptideal in $R \Rightarrow \varphi(J)$ Hauptideal in T.

Diskutieren Sie analoge Aussagen mit Primideal bzw maximalem Ideal statt Hauptideal.

zu bearbeiten:

(1) (a) Sei $f(x) = x^4 + x - 1$ und $g(x) = x - 1$ (in $\mathbb{Q}[x]$). Bestimmen sie $h(x)$ und $r(x)$, so dass $f(x) = h(x)g(x) + r(x)$ mit Grad $(r) <$ Grad (g).

(b) Sei $R = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ und $f(x) = g(x) = 2x + 1 \in R[x]$. Bestimmen Sie die Grade von f, g und fg und erklären Sie, was hier passiert.

(2) Sei R ein kommutativer Ring, und sei I ein Ideal in R. Zeigen Sie, dass $I[x]$ genau dann ein Primideal in $R[x]$ ist, wenn I ein Primideal in R ist.

(3) (a) Bestimmen Sie alle maximalen Ideale und alle Primideale in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$).

(b) Bestimmen Sie alle maximalen Ideale und alle Primideale in $\mathbb{C}[x]$.

(c) Sei $R = \mathbb{Q}[x]$ und $I = (x^2 - 2)$ das von $f(x) = x^2 - 2$ erzeugte Ideal. Ist I ein Primideal oder sogar ein maximales Ideal? Ist der Quotientenring R/I isomorph zu $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}$?

(4) Sei p eine Primzahl, und sei R ein kommutativer Ring, in dem $p \cdot 1_R := 1_R + \cdots + 1_R$ (p mal) gleich Null ist. Zeigen Sie die folgende, auch als Freshman's Dream bekannte Ausage: $\forall x, y \in R, a \in \mathbb{N} : (x + y)^{p^a} = x^{p^a} + y^{p^a}$.
Sei $F : R \to R$ die Abbildung $x \mapsto x^p$. Ist F ein Ringhomomorphismus? Sogar ein Isomorphismus?

(5) Sei R ein kommutativer Ring. Zwei Ideale I, J von R heißen <u>teilerfremd</u>, falls $I + J = R$ gilt.

(a) Seien I, J zwei teilerfremde Ideale von R. Zeigen Sie: dass $I \cdot J = I \cap J$ gilt, wobei $I \cdot J := \{\sum_{i=1}^n a_i b_i | a_i \in I, b_i \in J, n \in \mathbb{N}\}$.

(b) Seien $I_1, \ldots, I_n$ Ideale in R, die paarweise teilerfremd zueinander sind. Dann gilt:
(i) Jedes Ideal I_j ist teilerfremd zu $\prod_{i \neq j} I_i$.
(ii) $\prod_{i=1}^n I_i = \bigcap_{i=1}^n I_i$.

Bitte wenden!

(iii) Die Zuordnung $x \mapsto (x + I_1, \ldots, x + I_n)$ definiert einen Ringhomomorphismus $\varphi : R \to \prod_{j=1}^n R/I_j$; dieser induziert einen Isomorphismus $R/\prod_{j=1}^n I_j \to \prod_{j=1}^n R/I_j$.

(c) Finden Sie eine ganzzahlige Lösung des Systems von Kongruenzen

$$x \equiv 1 \mod 2, \quad x \equiv 2 \mod 3, \quad x \equiv 3 \mod 5.$$

schriftliche Aufgaben:

(1) *(5 Punkte)* Seien $a, n \in \mathbb{N}$ teilerfremd, $n \geq 2$ und sei l die Anzahl der ganzen Zahlen d zwischen 1 und n mit $ggT(n, d) = 1$. Zeigen Sie, dass $a^l \equiv 1 \mod n$ gilt.

(2) *(5 Punkte)* Sei R ein Ring und I ein Ideal. Gibt es eine Bijektion zwischen den (Prim-, Haupt-, maximalen) Idealen von R/I und den (Prim-, Haupt-, maximalen) Idealen J von R mit $I \subset J$? (Beweis oder Gegenbeispiel).

Abgabe ist in den Übungsgruppen am Mittwoch, 01.06.2011.

Die Übungen finden zum fünften Mal am Mittwoch, 01.06.2011 statt.

Alle Aufgabenblätter und ein Glossar finden Sie auf der Webseite
http://www.iaz.uni-stuttgart.de/LstAGeoAlg/Koenig/SS11.t

Sprechstunden: Steffen Koenig (7.519), Dienstag 10:00-11:00
Qunhua Liu (7.561), Donnerstag 10:00-11:00