Steffen Koenig
Qunhua Liu

Montag, 16. Mai 2011
Aufgabenblatt 4

Übungen zur Vorlesung Algebra

zur Diskussion: Gegeben sind ein Ring R, ein Teilring S, Ideale I und J in R und ein Ideal H in S. Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch?

(1) $I \cup J$ ist ein Ideal in R.
(2) $I \cap J$ ist ein Ideal in R.
(3) H ist ein Ideal in R.
(4) $I \cap S$ ist ein Ideal in S.
(5) $I + J := \{x + y \mid x \in I, y \in J\}$ ist ein Ideal in R.
(6) $I \cdot J := \{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \mid x_i \in I, y_i \in J, n \in \mathbb{N}\}$ ist ein Ideal in R.
(7) $(I + J)/J \cong I/(I \cap J)$ als abelsche Gruppen.
(8) $S + R$ ist ein Ideal in R.
(9) Für $x \in R$ ist $Rx + xR := \{yx + xz \mid y, z \in R\}$ ein Ideal in R.

zu bearbeiten:

(1) Sei G eine Gruppe der Ordnung 36. Zeigen Sie, dass G nicht einfach ist.
Hinweis: Im Fall, dass G mehr als eine 3*-Sylowuntergruppe hat, betrachten Sie die Operation von G auf den* 3*-Sylowuntergruppen durch Konjugation und definieren Sie einen Gruppenhomomorphismus* $G \to \Sigma_4$.

(2) Sei G eine Gruppe, $H \lhd G$ ein Normalteiler, und P eine p-Sylowuntergruppe von G/H. Zeigen Sie: es existiert eine p-Sylowuntergruppe Q von G mit $\varphi(Q) = P$, wobei $\varphi : G \to G/H$ der natürliche Quotientenhomomorphismus ist.

(3) Sei H eine normale Untergruppe der endlichen Gruppe G, sei p eine Primzahl, die $[G : H]$ nicht teilt, und sei P eine p-Sylowuntergruppe von G.
  (a) Zeigen Sie, dass $P \leq H$ gilt. Gilt dies auch für eine beliebige p-Untergruppe von G?
  (b) Vergleichen Sie die p-Sylowuntergruppen von G und von H. Zeigen Sie, dass $G = H \cdot N_G(P)$ gilt.

(4) Sei G eine Gruppe der Ordnung p^n, wobei p eine Primzahl ist, und $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Zeigen Sie, dass G nicht einfach ist.

(5) Bestimmen Sie die Einheiten der folgenden Ringe:
  (a) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$
  (b) $(\mathbb{R}, +, \cdot)$
  (c) $(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$
  (d) Ring der differenzierbaren Funktionen von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$ mit der Addition $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ und der Multiplikation $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
  (e) Bilden die Einheiten in einem Ring $(R, +, \cdot)$ eine Gruppe bezüglich der Multiplikation? (Beweis oder Gegenbeispiel)

Bitte wenden!

schriftliche Aufgaben:

(1) *(5 Punkte)*
   (a) Bestimmen Sie alle Gruppen der Ordnung 143.
   (b) Bestimmen Sie alle Gruppen der Ordnung 637.

(2) *(5 Punkte)* Sei $(G, +)$ eine abelsche Gruppe und

$$\mathrm{End}(G) := \{f : G \to G | f \text{ Homomorphismus von abelschen Gruppen}\}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathrm{End}(G)$ ein Ring ist mit $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$ und $(f \cdot g)(x) = f(g(x))$. Bestimmen Sie $\mathrm{End}(G)$ für $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und für $G = \mathbb{Z}$.

Abgabe ist in den Übungsgruppen am Mittwoch, 25.05.2011.

Die Übungen finden zum fünften Mal am Mittwoch, 25.05.2011 statt.

Alle Aufgabenblätter und ein Glossar finden Sie auf der Webseite
http://www.iaz.uni-stuttgart.de/LstAGeoAlg/Koenig/SS11.t

Sprechstunden: Steffen Koenig (7.519), Dienstag 10:00-11:00
Qunhua Liu (7.561), Donnerstag 10:00-11:00