

## Übungen zur Vorlesung Algebra

**zur Diskussion:** Wir betrachten die additive Gruppe  $(\mathbb{Q}, +)$ , ihre Untergruppe  $\mathbb{Z}$  und die Faktorgruppe  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ .

- (1) Bestimmen Sie die Ordnung der Restklasse von  $\frac{9}{4}$  in  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ .
- (2) Bestimmen Sie die Ordnung der Restklasse von  $\frac{a}{b}$  in  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  für  $a, b \in \mathbb{N}$ .
- (3) Welche ganzen Zahlen können als Ordnung von Elementen in  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  auftreten? Gibt es Elemente unendlicher Ordnung?

**zu bearbeiten:**

- (1) Sei  $G$  eine endliche Gruppe. Zeigen Sie:
  - (a) Falls  $G$  genau zwei Untergruppen hat, ist  $G$  zyklisch mit Primzahlordnung.
  - (b) Falls  $G$  genau drei Untergruppen hat, ist  $G$  zyklisch mit Primzahlquadratordnung.
- (2) Sei  $G$  eine Gruppe mit endlich vielen Untergruppen. Zeigen Sie, dass  $G$  endlich ist.
- (3) Sei  $H < G$  eine Untergruppe. Bestimmen Sie den Stabilisator einer Nebenklasse  $gH$ , wenn  $G$  auf  $G/H$  durch Linksmultiplikation operiert.
- (4) Sei  $G$  eine Gruppe mit 55 Elementen und  $M$  eine Menge mit 39 Elementen. Zeigen Sie, dass jede Operation von  $G$  auf  $M$  einen Fixpunkt hat.
- (5) Sei  $N$  eine normale Untergruppe der endlichen Gruppe  $G$ , und sei  $g \in N$ . Zeigen Sie, dass die Konjugationsklasse von  $g$  in  $G$  eine Vereinigung von Konjugationsklassen in  $N$  ist.

**schriftliche Aufgaben:**

- (1) (5 Punkte) Seien  $a, b, c$  Elemente in einer Gruppe  $G$ .
  - (a) Zeigen Sie, dass  $a$  und  $a^{-1}$  dieselbe Ordnung haben.
  - (b) Zeigen Sie, dass  $ab$  und  $ba$  dieselbe Ordnung haben.
  - (c) Zeigen Sie, dass  $abc$  und  $bca$  dieselbe Ordnung haben. (Versuchen Sie, dies zu verallgemeinern.)
  - (d) Finden Sie drei Elemente  $a, b, c$  in der symmetrischen Gruppe  $\Sigma_3$ , so dass  $abc$  und  $bac$  verschiedene Ordnungen haben.
- (2) (5 Punkte) Sei  $G$  eine endliche Gruppe und  $H$  eine echte Untergruppe. Zeigen Sie:  
 $G \supsetneq \bigcup_{g \in G} gHg^{-1}$ .

*Bitte wenden!*

*Abgabe ist in den Übungsgruppen am Mittwoch, 18.05.2011.*

*Die Übungen finden zum dritten Mal am Mittwoch, 18.05.2011 statt.*

*Alle Aufgabenblätter und ein Glossar finden Sie auf der Webseite  
<http://www.iaz.uni-stuttgart.de/LstAGeoAlg/Koenig/SS11.t>*

*Sprechstunden: Steffen Koenig (7.519), Di. 10:00-11:00, Qunhua Liu (7.561), Do. 10:00-11:00.*