Steffen Koenig
Qunhua Liu

Montag, 02. Mai 2011
Aufgabenblatt 2

Übungen zur Vorlesung Algebra

zur Diskussion: Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? (Eine Gruppe heißt einfach, wenn sie außer sich selbst und der einelementigen Gruppe keine normale Untergruppe enthält.)

(1) Es gibt unendliche abelsche Gruppen, die einfach sind.
(2) Sei G eine einfache abelsche Gruppe. Dann ist die Ordnung $\mathrm{ord}(G)$ eine Primzahl.
(3) Sei G eine Gruppe, so daß die Ordnung $\mathrm{ord}(G)$ eine Primzahl ist. Dann ist G einfach und abelsch.

zu bearbeiten:

(1) (a) Sei G eine Gruppe und $\{H_i : i \in I\}$ eine Menge von Untergruppen. Zeigen Sie, dass

$$H := \bigcap_{i \in I} H_i$$

eine Untergruppe ist.

(b) Sei M eine nichtleere Teilmenge von G und sei

$$< M > := \bigcap_{\substack{H \supset M \\ \text{H Untergruppe von G}}} H$$

'die von M erzeugte Untergruppe'. Sei

$$M' := \{g \in G : \exists k \geq 0, m_i \in M \text{und } \epsilon_i \in \{1, -1\} (i = 1, \ldots, k) \text{ mit } g = m_1^{\epsilon_1} \cdots \cdot m_k^{\epsilon_k})\}.$$

Gilt $< M >= M'$? (Beweis oder Gegenbeispiel)

(c) Gilt $(\mathbb{Q}, +) =< \frac{1}{p} : p$ Primzahl $>$?

(2) Sei $G = GL(n, \mathbb{Q})$ und $H = GL_+(n, \mathbb{Q}) := \{g \in GL(n, \mathbb{Q}) : \det(g) > 0\}$. Zeigen Sie, dass H eine Untergruppe von G ist und bestimmen Sie die Links- und Rechtsnebenklassen. Ist H normal?

(3) Sei G eine Gruppe mit Untergruppen H und N. Mit HN wird die Menge $\{hn : h \in H, n \in N\}$ aller Produkte bezeichnet. Zeigen Sie (z.B für $G = \Sigma_3$), dass HN keine Untergruppe sein muß.
Sei nun N ein Normalteiler. Zeigen Sie: $HN = NH$ ist eine Untergruppe, $N \cap H$ ist ein Normalteiler von H, und es gilt $H/(N \cap H) \simeq NH/N$.

(4) Sei G eine Gruppe, und seien H_1, H_2 Normalteiler in G mit $H_1 \subset H_2$.
Zeigen Sie: H_1 ist ein Normalteiler in H_2, H_2/H_1 ist ein Normalteiler in G/H_1 und es gilt die Kürzungsregel: $(G/H_1)/(H_2/H_1) \simeq G/H_2$.

Bitte wenden!

schriftliche Aufgabe: *(10 Punkte)*

Sei $G = (\mathbb{Z}/21\mathbb{Z})^* = \{1, 2, 4, 5, 8, 10, 11, 13, 16, 17, 19, 20\}$. Zeigen Sie, dass die Teilmenge $H = \{1, 4, 16\}$ eine Untergruppe ist. Da G abelsch ist, ist H automatisch nomal. Identifizieren Sie die vier Elemente in der Quotientengruppe G/H und konstruieren Sie die Multiplikationstafel. Entscheiden Sie, ob G/H isomorph zu $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ist.

Abgabe ist in den Übungsgruppen am Mittwoch, 11.05.2011.

Die Übungen finden zum zweiten Mal am Mittwoch, 11.05.2011 statt.

Alle Aufgabenblätter und ein Glossar finden Sie auf der Webseite
http://www.iaz.uni-stuttgart.de/LstAGeoAlg/Koenig/SS11.t