Steffen Koenig
Qunhua Liu

Montag, 18. Juli 2011
Aufgabenblatt 12

Übungen zur Vorlesung Algebra

zur Diskussion:

(1) Geben Sie Beispiele für Winkel an, die man mit Zirkel und Lineal dreiteilen kann.
(2) Für welche $n \in \mathbb{N}$ kann man den Würfel ver-n-fachen?
(3) Ist jede endliche Gruppe die Galoisgruppe einer Körpererweiterung L/K?
(4) Ist jede endliche abelsche Gruppe die Galoisgruppe einer Körpererweiterung $L/\mathbb{Q}$?
(5) Kann man alle Lösungen der Gleichung $x^5 = 1$ durch Wurzelausdrücke über den rationalen Zahlen schreiben?

zu bearbeiten:

(1) Sei $f \in \mathbb{Q}[x]$ ein Polynom vom Grad $n \geq 3$ und E der Zerfällungskörper von f. Die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$ sei isomorph zu Σ_n. Zeigen Sie:
  (a) f ist irreduzibel über $\mathbb{Q}$.
  (b) Ist α eine Nullstelle von f, dann gibt es genau einen $\mathbb{Q}$-Automorphismus von $\mathbb{Q}(\alpha)$.
  (c) Ist $n \geq 4$, dann ist α^n nicht rational.

(2) Sei L/K eine Galoiserweiterung von Grad 245. Zeigen Sie:
  (a) Es gibt Zwischenkörper L_1 und L_2 mit $[L_1 : K] = 49$ und $[L_2 : K] = 5$.
  (b) Solche Zwischenkörper L_1 und L_2 sind Galoissch über K.
  (c) Die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(L/K)$ ist abelsch.

(3) Sei L ein Körper, $G \subset \mathrm{Aut}(L)$ eine Untergruppe, sodass für jedes $a \in L$ die Bahn $Ga := \{ga \mid g \in G\}$ endlich ist. Sei $K = L^G$. Zeigen Sie, dass L/K algebraisch und normal ist, und dass jedes $a \in L$ separabel ist über K.

(4) Sei L/K eine separable Körpererweiterung von Grad n. Zeigen Sie, dass die Anzahl der Zwischenkörper nicht größer als $2^{n!}$ ist.

(5) Sei K ein Körper mit $\mathrm{char}(K) \neq 2$.
  (a) Sei E eine algebraische Körpererweiterung mit $[E : K] = 2$. Zeigen Sie, dass es ein $\alpha \in K$ gibt, sodass $L = K(\sqrt{\alpha})$ ist. $\sqrt{\alpha}$ bezeichnet dabei eine Nullstelle des Polynoms $x^2 - \alpha$.
  (b) Sei L eine Galoiserweiterung von K mit Galoisgruppe $G = \mathrm{Gal}(L/K) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^l$ mit $l \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass es Elemente $\alpha_1, \ldots, \alpha_l \in K$ gibt, sodass $L = K(\sqrt{\alpha_1}, \sqrt{\alpha_2}, \ldots, \sqrt{\alpha_l})$ ist.
  (c) Zeigen Sie weiter, dass $L = K(\sqrt{\alpha_1} + \sqrt{\alpha_2} + \ldots + \sqrt{\alpha_l})$ ist.

Bitte wenden!

Die Übungen finden zum letzten Mal am Mittwoch, 27.07.2011 statt.

Alle Aufgabenblätter und ein Glossar finden Sie auf der Webseite
http://www.iaz.uni-stuttgart.de/LstAGeoAlg/Koenig/SS11.t

Sprechstunden: Steffen Koenig (7.519), Dienstag 10:00-11:00
Qunhua Liu (7.561), Donnerstag 10:00-11:00
(In den Ferien Sprechstunden nur nach Vereinbarung.)

Die Prüfung findet am Freitag 16.09.2011 statt. Weitere Informationen zur Prüfung und Termine für Sprechstunden in den beiden Wochen vor der Prüfung werden so bald wie möglich auf der folgenden Webseite bekannt gegeben:
http://www.iaz.uni-stuttgart.de/LstAGeoAlg/Koenig/SS11-Pruefungsinfo.t

Wir stellen studentische Hilfskräfte ein, die als Tutoren bei der LAAG im Wintersemester 2011/12 mitarbeiten wollen. Interessenten melden sich bitte bei Steffen König oder Qunhua Liu.