Steffen Koenig
Qunhua Liu

Montag, 11. Juli 2011
Aufgabenblatt 11

Übungen zur Vorlesung Algebra

zur Diskussion:

(1) Sei K ein Körper mit Teilkörpern F_1 und F_2, die beide endlich sind und gleich viele Elemente haben. Sind F_1 und F_2 isomorph?

(2) Sei K ein Körper mit Teilkörpern F_1 und F_2, die beide endlich sind und gleich viele Elemente haben. Sind F_1 und F_2 gleich?

(3) Ist der algebraische Abschluss von $\mathbb{F}_p$ eine abzählbare Menge?

(4) Ist der algebraische Abschluss von $\mathbb{F}_p$ eine abzählbare Vereinigung endlicher Körper?

(5) Sei L/K eine Galoiserweiterung mit abelscher Galoisgruppe und M ein Zwischenkörper. Sind die Erweiterungen L/M und M/K auch Galois mit abelschen Galoisgruppen?

zu bearbeiten:

(1) Sei $n \in \mathbb{N}$ und p prim. Nach Theorem 4.9 in der Vorlesung ist $\mathbb{F}_{p^n}/\mathbb{F}_p$ eine Galoiserweiterung. Bestimmen Sie alle Untergruppen von $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{p^n}/\mathbb{F}_p)$ und die zugehörigen Zwischenkörper sowie deren Dimensionen.

(2) Sei L der Zerfällungskörper von $x^3 - 7$ über $\mathbb{Q}$. Zeigen Sie, dass $L/\mathbb{Q}$ eine Galoiserweiterung ist, und bestimmen Sie $G := \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$, alle Untergruppen von G, sowie die entsprechenden Zwischenkörper der Erweiterung $L/\mathbb{Q}$.

(3) Sei $K = \mathbb{F}_{729}$ der Körper mit $729 = 3^6$ Elementen.
  (a) Wieviele Unterkörper hat K?
  (b) Zeigen Sie, dass es genau 696 Elemente $\alpha \in K$ gibt mit $K = \mathbb{F}_3(\alpha)$.
  (c) Zeigen Sie, dass es genau 116 normierte irreduzible Polynome vom Grad 6 in $\mathbb{F}_3[x]$ gibt.

(4) Sei p eine Primzahl. Zeigen Sie, dass die Galoisgruppe des Zerfällungskörpers von $x^p - 2$ über $\mathbb{Q}$ isomorph ist zu

$$G = \{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{F}_p,\ a \neq 0 \}.$$

(5) Sei L/K eine Galoiserweiterung mit Galoisgruppe $G = \{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$. Sei $a \in L$. Zeigen Sie: $L = K(a) \Leftrightarrow \sigma_1(a), \dots, \sigma_n(a)$ sind paarweise verschieden.

schriftliche Aufgaben:

(1) *(5 Punkte)* Sei L der Zerfällungskörper von $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$. Bestimmen Sie die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(L/K)$ und alle Zwischenkörper von L/K.

(2) *(5 Punkte)* Sei $K = \mathbb{C}$ und $L = \mathbb{C}(x)$ mit einer Unbestimmten x. Für $a \in \mathbb{C}$, sei $\sigma_a : L \to L$ der K-Automorphismus, der x auf $x + a$ abgebildet. Sei $G = \{\sigma_a : a \in \mathbb{C}\}$. Zeigen Sie, dass G eine Untergruppe von $\mathrm{Aut}_K(L)$ ist und $L^G = K$ gilt.

Bitte wenden!

Abgabe ist in den Übungsgruppen am Mittwoch, 20.07.2011.

Die Übungen finden zum elften Mal am Mittwoch, 20.07.2011 statt.

Alle Aufgabenblätter und ein Glossar finden Sie auf der Webseite
http://www.iaz.uni-stuttgart.de/LstAGeoAlg/Koenig/SS11.t

Sprechstunden: Steffen Koenig (7.519), Dienstag 10:00-11:00
Qunhua Liu (7.561), Donnerstag 10:00-11:00