Steffen Koenig
Qunhua Liu

Montag, 04. Juli 2011
Aufgabenblatt 10

Übungen zur Vorlesung Algebra

zu bearbeiten:

(1) (a) Bestimmen Sie unendlich viele primitive Elemente für die Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})/\mathbb{Q}$.
(b) Bestimmen Sie ein primitives Element für die Erweiterung $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, e^{\frac{2\pi i}{3}})/\mathbb{Q}$.

(2) Zeigen Sie:
(a) ein Körper K kann nicht zwei Teilkörper k und k' haben mit $k \cong \mathbb{Q}$ und $k' \cong \mathbb{F}_p$ für irgendeine Primzahl p;
(b) ein Körper K kann nicht zwei Teilkörper k und k' haben mit $k \cong \mathbb{F}_{p_1}$ und $k' \cong \mathbb{F}_{p_2}$ für Primzahlen p_1, p_2 mit $p_1 \neq p_2$.

(3) (a) Ist $\mathbb{F}_4$ ein Teilkörper von $\mathbb{F}_8$?
(b) Sei p eine Primzahl. Zeigen Sie: $\mathbb{F}_{p^n}$ ist ein Teilkörper von $\mathbb{F}_{p^m} \Rightarrow n|m$.

(4) Sei K ein Körper der Charakteristik p, und a algebraisch abhängig über K. Zeigen Sie: a separabel $\Leftrightarrow K(a) = K(a^p)$.

(5) Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ mit $\mathrm{ggT}(n, \mathrm{char}\ K) = 1$, und sei L der Zerfällungskörper von $f(x) = x^n - 1$ über K. Zeigen Sie, dass L/K eine Galoiserweiterung ist.

schriftliche Aufgaben:

(1) *(5 Punkte)* Bestimmen Sie die Additions- und Multiplikationstabellen für den Körper $\mathbb{F}_8$ mit 8 Elementen. Gilt $\mathbb{F}_8 \cong \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ als Ringe?

(2) *(5 Punkte)* Sei $L/\mathbb{Q}$ eine endliche Körpererweiterung. Zeigen Sie: wenn $L/\mathbb{Q}$ keinen echten Zwischenkörper hat, dann hat $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(L)$ keine echte Untergruppe. Gilt die Umkehrung? (Beweis oder Gegenbeispiel).

Abgabe ist in den Übungsgruppen am Mittwoch, 13.07.2011.

Die Übungen finden zum zehnten Mal am Mittwoch, 13.07.2011 statt.

Alle Aufgabenblätter und ein Glossar finden Sie auf der Webseite
http://www.iaz.uni-stuttgart.de/LstAGeoAlg/Koenig/SS11.t

Sprechstunden: Steffen Koenig (7.519), Dienstag 10:00-11:00
Qunhua Liu (7.561), Donnerstag 10:00-11:00