

Übungen zur Vorlesung Algebra

zur Diskussion: Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch?

- (1) Die Gruppe $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ hat genau zwei Untergruppen.
- (2) Die Gruppe $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ hat genau drei Untergruppen.
- (3) Es gibt eine Gruppe G mit echten Untergruppen $H_1, H_2 \subsetneq G$, so daß gilt: $G = H_1 \cup H_2$.
- (4) Es gibt eine Gruppe G mit echten Untergruppen $H_1, H_2, H_3 \subsetneq G$, so daß gilt: $G = H_1 \cup H_2 \cup H_3$.
- (5) Sei G eine abelsche Gruppe, und $f : G \rightarrow G$ eine Abbildung mit $f(g) = g^2$ ($g \in G$). Dann ist f ein Gruppenhomomorphismus.
- (6) Sei G eine Gruppe, und $f : G \rightarrow G$ ein Gruppenhomomorphismus mit $f(g) = g^2$ ($g \in G$). Dann ist G abelsch.

zu bearbeiten:

- (1) (a) Sei G eine Gruppe, so dass für jedes Element $x \in G$ gilt: $x^2 = e$. Ist G abelsch? (Beweis oder Gegenbeispiel).
(b) Sei G eine unendliche Gruppe und $x \in G$ ein Element mit $x^3 = e$. Gilt $x = e$? (Beweis oder Gegenbeispiel).
- (2) Sei X eine Menge, G eine Gruppe und G^X die Menge der Abbildungen von X nach G . Zeigen Sie, dass G^X eine Gruppe ist, wenn man die Verknüpfung definiert durch $(f * g)(x) := f(x) \cdot g(x)$ (Produkt in G). Wann ist G^X abelsch?
- (3) Sei G eine Gruppe und H eine Teilmenge von G . Zeigen Sie: H ist eine Untergruppe von $G \iff H \neq \emptyset$ und $\forall a, b \in H$ gilt $ab^{-1} \in H$ (Produkt in G).
- (4) Sei G eine Gruppe, und sei $g_0 \in G$, $g_0 \neq e$. Durch $g_1 * g_2 := g_1 g_0 g_2$ wird eine neue Multiplikation auf G definiert. Ist $(G, *)$ eine Gruppe? (Beweis oder Gegenbeispiel).

schriftliche Aufgaben:

- (1) (5 Punkte) Sei G eine Gruppe, und H_1, H_2 zwei Untergruppen von G . Zeigen Sie, daß der Durchschnitt $H_1 \cap H_2$ auch eine Untergruppe ist. Ist $H_1 \cup H_2$ auch eine Untergruppe? (Beweis oder Gegenbeispiel).
- (2) (5 Punkte) Sei G eine Gruppe. Für $g, h \in G$ gilt $(gh)^2 = g^2 h^2$. Zeigen Sie, daß G abelsch ist.

Abgabe ist in den Übungsgruppen am Mittwoch, 04.05.2011.

Die Übungen finden erstmals am Mittwoch, 04.05.2011 statt.

*Alle Aufgabenblätter und ein Glossar finden Sie auf der Webseite
<http://www.iaz.uni-stuttgart.de/LstAGeoAlg/Koenig/SS11.t>*