6.20 Bem: (Magische-Dreiecke-Kartenspiel)

Zurück zu den Kartenspielen in 6.1 und 6.2.
Es handelt sich um eine Zufallsentdeckung aus dem Jahr 2012. Die Kunstgalerie Baltic in Newcastle, UK, wollte ihr 10 jähriges Bestehen feiern unter den Stichwörtern "Kunst" und "10". Steve Humble, auch Dr Math genannt, sollte beitragen. Sein Vorschlag war das in Aufgabe 6.1 beschriebene "Kartenspiel", beginnend mit einer ersten Reihe mit $n = 10$ Karten. Das Spiel wurde einige Tage gespielt, und die Leute erfreuten sich an den Mustern, die hierbei entstehen. Irgendwann fiel Dr Math auf, daß er die Farbe der letzten Karte vorhersagen kann, nur aus dem Wissen der beiden Randkarten der 1. Reihe. Dabei gilt dieselbe Regel, wie beim Legen von Reihe zu Reihe: Sind die beiden Randkarten der 1. Reihe gleicher Farbe, so ist die letzte Karte im Spiel von der gleichen Farbe. Sind die beiden Randkarten verschiedenfarbig, so hat die letzte Karte die noch fehlende dritte Farbe.

Soweit die Vermutung von Dr. Math. Vielleicht haben Sie am Anfang des Kapitels einige Beispiele ausprobiert? Überprüfen Sie diese auf die geäußerte Behauptung. Gilt die Vermutung auch für andere n, also z.B. Startreihe mit $n = 9$ Karten?

Unser nächstes Ziel ist es, die Vermutung von Dr Math zu formalisieren. Hierzu benötigen wir noch Notation:

6.21 <u>Notation</u>:

Sei M eine nicht-leere Menge.
Sei $\phi : M \times M \to M$ eine Abbildung.
Schreibe $M^r := \underbrace{M \times M \times \ldots \times M}_{r \text{ mal}}$, für $r \in \mathbb{N}$.

Definiere
$$\phi_r : M^r \longrightarrow M^{r-1}$$
$$(x_1, \ldots, x_r) \longmapsto (\phi(x_1, x_2), \phi(x_2, x_3), \ldots, \phi(x_{r-1}, x_r))$$

Sei $\psi_n := \phi_2 \circ \ldots \circ \phi_{n-1} \circ \phi_n$.

6.22. <u>Bem</u>: Wir nutzen im Folgenden immer wieder die Notation in 6.21, ohne sie erneut einzuführen.

(a) Die Vermutung von Dr. Math in Bezug auf das magische Dreiecks-Kartenspiel[6] ist jetzt durch
$$\psi_{10}(x_1, \ldots, x_{10}) = \phi(x_1, x_{10})$$
für alle $x_1, \ldots, x_{10} \in M = \{0, 1, 2\}$ gegeben. Die Abbildung $\phi : M \times M \to M$ ist hierbei gegeben durch:

(b) Wir sollten uns an dieser Stelle auch klar machen, daß die Vermutung von Dr Math nicht für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Statt mit Farben zu arbeiten, nutzen wir jetzt $M = \{0,1,2\}$ und ϕ aus (a). Sei beispielsweise $n=5$.

Dann gilt:

In diesem Beispiel ist $\psi_5(\quad) \neq \phi(\quad)$.

Dies führt zu folgender Definition:

6.23 <u>Def</u>:

Eine natürliche Zahl $n > 2$ heißt <u>ϕ-geeignet</u>, falls

$$\psi_n(x_1, \dots, x_n) = \phi(x_1, x_n)$$

für alle $x_1, \dots, x_n \in M$ ist.

6.24 <u>Problemstellung</u>:

Gegeben ist Abbildung $\phi: M \times M \to M$ wie in 6.21.
Finde alle ϕ-geeigneten natürlichen Zahlen.

6.25 <u>Bsp</u>: Die Problemstellung in dieser Form ist noch sehr allgemein, da ϕ beliebige Abbildung ist. Wir müssen spezialisieren, um Aussagen treffen zu können.

(a) Sei $\phi: \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2$ definiert durch $\phi(x,y) = x+y$, für $x, y \in \mathbb{Z}_2$. Wir wählen hier also $M = \mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$.
Zeigen Sie, daß $n=3$ eine ϕ-geeignete Zahl ist.
Wir spielen also das magische Dreiecks-Kartenspiel

mit einer Anfangsreihe mit 3 "Karten", beziehungsweise, wir übersetzen in Zahlen, mit einer Anfangsreihe von 3 Zahlen aus $M = \mathbb{Z}_2$. Die Reihen in unserem Kartenspiel bilden wir mittels ϕ. Für unser spezielles ϕ ergibt sich das Dreieck:

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & & x_2 & & x_3 \\ & x_1+x_2 & & x_2+x_3 & \\ & & x_1+2x_2+x_3 & & \end{array}.$$

Um zu zeigen, daß $n=3$ eine ϕ-geeignete Zahl ist, müssen wir zeigen, daß

$$\psi_3(x_1,x_2,x_3) = \phi(x_1,x_3)$$

für alle $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}_2$ ist. Hier ist der Beweis dazu:

000 100

Für $n=4$ oder $n=6$ gilt hingegen, daß diese nicht ϕ-geeignet sind, denn beispielsweise haben wir:

$n=4$ $\qquad$ $n=6$

Wieviele Fälle müssen Sie prüfen, um zu zeigen, daß $n=5$ eine ϕ-geeignete Zahl ist?

(b) Wir machen ein weiteres Beispiel. Sei M eine nicht-leere Menge. Sei $\phi(x,y) := x$ für alle $x, y \in M$. Bestimmen Sie für dieses ϕ alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}^{\geq 2}$ die ϕ-geeignet sind:

Es ist $\psi(x_1, \dots, x_n) =$

Also ist

6.26 <u>Bem:</u>

Am letzten Beispiel sehen wir, daß das Problem 6.24 unter Umständen uninteressant ist. Für die meisten ϕ ist das Problem offen.

Um die Zuschauer/Teilnehmer des Spiels zu verblüffen, zum Beispiel in Form eines Zaubertricks, benötigen wir in jedem Fall Abbildungen ϕ die leicht umzusetzen sind. Die beiden Abbildungen aus 6.1 und 6.2 sind von der folgenden Form, und diese wollen wir analysieren: Sei $(G,+)$ eine abelsche Gruppe. Definiere die Abbildungen

$$\phi^+ : G \times G \longrightarrow G, \ (x,y) \longmapsto x+y$$

$$\phi^- : G \times G \longrightarrow G, \ (x,y) \longmapsto -(x+y).$$

Unser Frage ist also: welche $n > 2$ sind ϕ^+-geeignet, welche sind ϕ^--geeignet, bei gegebener Gruppe G.

6.27 <u>Übung</u>:

In Beispiel 6.4 haben wir das magische Dreiecks-Kartenspiel für $M = \mathbb{Z}_5$ mit ϕ^+ gespielt, zur Anfangsreihe 1 0 4 4 3 2. Legen Sie das magische Dreieck für $M = \mathbb{Z}_5$ und ϕ^- für dieselbe Anfangsreihe 104432. Vergleichen Sie die beiden magischen Dreiecke. Was beobachten Sie? Können Sie Ihre Beobachtung erklären?

6.28 <u>Notation</u>:

Wir nutzen die folgende Notation aus der Algebra. Sei $x \in G$ und $a \in \mathbb{Z}$. Wir definieren

$$a \cdot x = \begin{cases} 0 & \text{falls } a = 0, \\ \underbrace{x + \dots + x}_{a \text{ mal}} & \text{falls } a > 0, \\ -(\underbrace{x + \dots + x}_{|a|\text{-mal}}) & \text{falls } a < 0. \end{cases}$$

6.29 <u>Bem</u>:

Wir betrachten im Folgenden die Abbildung ϕ^+ auf einer Gruppe $(G, +)$ und wollen die letzte Zahl im Spiel (also die Spitze des Dreiecks) berechnen. Seien $x_1, \dots, x_n \in G$, $n \in \mathbb{N}$.[22] Dann berechnet sich $\psi_n(x_1, \dots, x_n)$ wie folgt, wobei wir $\phi := \phi^+$ schreiben:

1. Zeile $(x_1, \dots, x_n)$

2. Zeile $\phi_n(x_1, \dots, x_n) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, \dots, x_{n-1} + x_n)$

3. Zeile $(\phi_{n-1} \circ \phi_n)(x_1, \dots, x_n) = (\underbrace{x_1 + 2x_2 + x_3}_{\text{1. Element}}, \underbrace{x_2 + 2x_3 + x_4}_{\text{2. Element}}, \dots, \underbrace{x_{n-2} + 2x_{n-1} + x_n}_{(n-2)\text{te Element}})$ etc.

In der nächsten Zeile, also in der 4. Zeile, steht das Element $(\phi_{n-2} \circ \phi_{n-1} \circ \phi_n)(x_1, \dots, x_n)$.
Dies ist ein $(n-3)$-Tupel. Der erste Eintrag in diesem Tupel ist _____.

6.30 <u>Lemma</u>: Wir benutzen Notation aus 6.29.
Das r-te Element in der k-ten Zeile des magischen Dreiecks ist

$$x_r + \binom{k-1}{1} x_{r+1} + \binom{k-1}{2} x_{r+2} + \dots + \binom{k-1}{k-2} x_{r+k-2} + x_{r+k-1},$$

mit $2 \leq k \leq n$ und $1 \leq r \leq n-k+1$.
Insbesondere ist

$$\psi_n(x_1, \dots, x_n) = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

<u>Beweis:</u>
Wir machen Induktion nach k. Für $k = 2, 3$ wurde die Formel oben bereits bewiesen.

6.31 <u>Übung</u>:

Formulieren Sie Lemma 6.30 für die Abbildung $\phi = \phi^-$.

6.32 <u>Bem</u>:

In dieser Bemerkung bereiten wir den nächsten Beweis vor. Sei $x \in G$. Definiere $M_x := \{a \in \mathbb{Z} \mid a \cdot x = 0\}$.

(a) Ein Ideal I in $\mathbb{Z}$, geschrieben $I \triangleleft \mathbb{Z}$, ist eine abelsche Gruppe $(I,+) \leq (\mathbb{Z},+)$ mit $r \cdot i \in I$, für alle $r \in \mathbb{Z}$ und $i \in I$. Zeigen Sie, daß M_x ein Ideal in $\mathbb{Z}$ ist:

(b) Da $\mathbb{Z}$ ein Hauptidealring ist, wird M_x also durch ein Element erzeugt. Dies bedeutet:

(*) $$M_x = \{b_x \cdot t \mid t \in \mathbb{Z}\} =: (b_x).$$

Es ist $(0) =$ _____ , $(1) =$ _____ , $(2) =$ _____ .

<u>Übung</u>: Beweisen Sie mittels Division mit Rest, daß die Menge M_x von einem Element erzeugt wird, also die Form (*) hat.

(c) Wir wählen $(x_1, \dots, x_n) = (0, \dots, 0, x, 0, \dots, 0)$ mit $x_k = x \in G \setminus \{0\}$, $2 \leq k \leq n-1$. Angenommen n ist eine ϕ^+-geeignete Zahl. So gilt

$$0 = 0 + 0 = \phi^+(0,0) \overset{6.23}{=} \psi_n(0, \dots, 0, x, 0, \dots, 0) \overset{6.30}{=} \binom{n-1}{k-1} x$$

$$\Rightarrow \left\{ \binom{n-1}{1}, \dots, \binom{n-1}{n-2} \right\} \subseteq M_x, \quad \forall x \in G \setminus \{0\}.$$

Hier ist das zentrale Ergebnis:

6.33 <u>Thm</u>: Sei $(G,+)$ abelsche Gruppe mit $|G| \geq 2$.

(a) Sei $p \in \mathbb{P}$ mit $px = 0$ für alle $x \in G$.
Ist $n = p^s + 1$ für $s \in \mathbb{N}$, so ist n eine ϕ^+-geeignete Zahl.

(b) Umgekehrt, ist $n \in \mathbb{N}$ eine ϕ^+-geeignete Zahl mit $n > 2$,
$\Rightarrow \exists p \in \mathbb{P}, s \in \mathbb{N}$ mit $n = p^s + 1$ und $px = 0, \forall x \in G$.

(c) Existiert keine Primzahl p mit $px = 0$, $\forall x \in G$,
$\Rightarrow$ es gibt keine ϕ^+-geeignete natürliche Zahl.

<u>Beweis</u>:

(a) Sei $n = p^s + 1$ für ein $s \in \mathbb{N}$.
Nach Prop 6.8 gilt: $p \mid \binom{n-1}{k}$ für $1 \leq k \leq n-2$
Da $px = 0$ für alle $x \in G$, nach Voraussetzung

$\Rightarrow \binom{n-1}{k} x = 0$, für alle $x \in G$, $1 \leq k \leq n-2$.

$\Rightarrow \psi_n(x_1, \dots, x_n) \overset{6.30}{=}$

$\Rightarrow n$ ist ϕ^+-geeignet.

(b) Sei $n > 2$ eine ϕ^+-geeignete Zahl.

$\overset{6.32}{\Rightarrow} \binom{n-1}{1}, \dots, \binom{n-1}{n-2}$ liegen in $M_x = (b_x)$, $\forall x \in G \setminus \{0\}$.

Wäre $b_x = 1$, so folgt $\overset{\text{aus Def von } M_x}{x} = 1 \cdot x = 0$. ↯

Also ist $b_x \neq 1$.

Wäre $b_x = 0$, so folgt aus $\underbrace{\binom{n-1}{1}}_{\neq 0} \cdot x = 0$ für $x \in G \setminus \{0\}$ ein Widerspruch. Also ist $b_x \neq 0$.

Angenommen Zahlen $z_1, \dots, z_{n-2} \in M_x = (b_x)$.

$\Rightarrow b_x \mid z_i$ für $1 \le i \le n-2$

$\Rightarrow b_x \mid \operatorname{ggt}(\{z_i \mid 1 \le i \le n-2\})$

Es folgt $\operatorname{ggt}\{\binom{n-1}{k} \mid 1 \le k \le n-2\} > 1$.

$\overset{6.10}{\Rightarrow} \exists p \in \mathbb{P}$ mit $b_x \mid p = \operatorname{ggt}\{\binom{n-1}{k} \mid 1 \le k \le n-2\}$ und $n-1 = p^s$ für ein $s \in \mathbb{N}$.

$\underset{p \in \mathbb{P}}{\overset{b_x \neq 1}{\Rightarrow}} b_x = p$ für alle $x \in G \setminus \{0\}$.

Ist also n eine ϕ^+-geeignete Zahl, so existiert $p \in \mathbb{P}$, $s \in \mathbb{N}$ mit $n = p^s + 1$, und es gilt außerdem $p \cdot x = 0$ für alle $x \in G \setminus \{0\}$ nach Definition von M_x.

(c) Angenommen es existiert keine Primzahl $p \in \mathbb{P}$ mit $px = 0$, für alle $x \in G \setminus \{0\}$. Wäre $n \in \mathbb{N}^{>2}$ eine ϕ^+-geeignete Zahl, so würde (b) implizieren: $\exists p \in \mathbb{P}$ mit $px = 0$, für alle $x \in G \setminus \{0\}$. $\lightning$ Also sind alle $n \in \mathbb{N}^{>2}$ nicht ϕ^+-geeignet.

Übung: Sei $m \in \mathbb{N}^{>2}$.
Sei $G = (\mathbb{Z}_m, +)$. Bestimmen Sie alle $n \in \mathbb{N}^{>2}$ die ϕ^+-geeignet sind. Begründen Sie ihre Antwort.

Übung: Formulieren Sie Thm 6.33 für ϕ^-.
(Beweisen Sie Ihre Behauptung.)