5.11 <u>Notation:</u>

Für den Beweis benötigen wir noch einen weiteren Übertragsvektor $(u_1 u_2 \dots u_n) := \tau_n^0(a)$ für $a = a_1 a_2 \dots a_n$.
Hierbei ist $\tau_n^0(a)$ der Übertragsvektor von

$$\begin{array}{cccccc} & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ - & a_n & a_{n-1} & \dots & a_2 & 0 \\ \hline u_1 & u_2 & u_3 & & u_n & \end{array} \leftarrow \text{Übertragsvektor}$$

Hier wird also lediglich die letzte Ziffer in der 2. Zeile durch Null ersetzt. In Analogie zur Notation in 5.9 definieren wir

$\phi_n :=$ Anzahl verschiedener Übertragsvektoren $\tau_n^0(a)$ für verschiedene $a := a_1 \dots a_n$ mit $a_1 > a_n$,

$\phi_n^0 :=$ Anzahl der verschiedenen Übertragsvektoren $\tau_n^0(a) = u_1 \dots u_n$ mit $u_2 = 0$,

$\phi_n^1 :=$ Anzahl verschiedener Übertragsvektoren $\tau_n^0(a) = u_1 \dots u_n$ mit $u_2 = 1$.

Nach Beispiel 5.10 gilt $\phi_6^0 =$ _____, $\phi_6^1 =$ _____ und $\phi_6 =$ _____

5.12 <u>Lemma:</u>

(1) Für $r \geq 1$ gelten die folgenden Rekursionen

$$\psi_{2(r+1)}^0 = \psi_{2r}, \quad \psi_{2(r+1)}^1 = \psi_{2r}^1 + \phi_{2r},$$

$$\phi_{2(r+1)}^0 = \underline{\qquad\qquad} \qquad \phi_{2(r+1)}^1 = \underline{\qquad\qquad}$$

(2) $\psi_{2r} = F_{2r}$ mit F_{2r} die $2r$-te Fibonaccizahl in der Folge $F_1, F_2, \dots = 1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$.

(3) Schreibe $n = \begin{cases} 2r & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ 2r+1 & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$ Dann existieren F_{2r} viele verschiedene Übertragsvektoren d.h. $\psi_n = F_{2r}$.

Beweis:

(1) Wir wollen zählen, wieviele Übertragsvektoren der Länge $2(n+1)$ existieren, indem wir diese mit den verschiedenen Übertragsvektoren der Länge $2n$ vergleichen. Wir nehmen hierzu eine Zahl $\tilde{a}$ der Länge $2(n+1)$. Wir vergleichen Sie mit einer Zahl der Länge $2n$. Die Zuordnungsvorschriften bei diesen Vergleichen sagen in beiden Fällen: Lasse die 2. Ziffer und die zweitletzte Ziffer (Position $2r-1$) weg. Genauer: Gegeben ist $\tilde{a} = a_1 \beta a_2 a_3 \dots a_{2r-1} \beta' a_{2r}$ mit $a_1 > a_{2r}$ mit $2(r+1)$ Ziffern. Wir ordnen bisweilen zu $\tilde{a} \longmapsto a$ und bisweilen $\tilde{a} \longmapsto a'$ mit $a = a_1 a_2 \dots a_{2r-1} a_{2r}$ und $a' = a_1 a_2 \dots a_{2r-1} 0$. Die Zahlen a und a' unterscheiden sich nur in der letzten Ziffer (Position $2r$). Wir wollen Übertragsvektoren vergleichen. Wir definieren diese wie in 5.6 bzw 5.11 durch:

$$
\begin{array}{lcl}
 & a_1\, a_2 \cdots a_{2r-1}\, a_{2r} & \\
(*) & -\ a_{2r}\, a_{2r-1} \cdots a_2\, a_1 & \\
\hline
 & 0\ t_1\ t_2\ t_3 \cdots t_{2r}\ 1 & \text{Übertragsvektoren}
\end{array}
\quad \text{und} \quad
\begin{array}{lcl}
 & a_1\, a_2 \cdots a_{2r-1}\, a_{2r} & \\
(**) & -\ a_{2r}\, a_{2r-1} \cdots a_2\ \ 0 & \\
\hline
 & 0\ u_1\ u_2\ u_3 \cdots u_{2r}\ 0 &
\end{array}
$$

Da $a_1 > a_{2r}$, ist $t_{2r} = 1$ und $t_1 = 0$, also $\tau_{2r}(a) = 0\, t_2 t_3 \dots t_{2r-1}\, 1$.
Da $a_1 > a_{2r}$, ist $u_1 = 0$. Nach Konstruktion von a' ist $u_{2r} = 0$.
Ob wir später die Zuordnung $\tilde{a} \longmapsto a$ oder $\tilde{a} \longmapsto a'$ wählen entscheidet sich am Wert $t_{2r} = 1$ bzw $u_{2r} = 0$. Sie erkennen die Zuordnung daran, ob wir t_i's oder u_j's schreiben werden.
Aufgrund der vielen gemeinsamen Ziffern von $\tilde{a}$ und a bzw $\tilde{a}$ und a' können wir mit der oben getroffenen Definition der t_i und u_j auch die vollständigen Übertrags-

vektoren $\tau(\tilde{a})$ hinschreiben, in Abhängigkeit der definierten t_i und u_j. Wir unterscheiden dabei drei Fälle: $\beta < \beta'$ oder $\beta = \beta'$ oder $\beta > \beta'$.

(a) Sei $\beta < \beta'$. Dann ist $\tau_n(\tilde{a})$ gegeben durch:

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & a_1 & \beta & a_2 & \cdots & a_{2r-2} & a_{2r-1} & \beta' \; a_{2r} \\
- & a_{2r} & \beta' & a_{2r-1} & \cdots & a_3 & a_2 & \beta \; a_1 \\
\hline
 & 0 & 1 & u_2 & u_3 & \cdots & u_{2r-1} & 0 \; 1
\end{array}
$$

Wegen $a_1 > a_{2r}$ ist Eintrag in rot ganz rechts eine Eins. Da $\beta < \beta'$, ist auch $\beta + 1 \leq \beta'$, also ist der zweitletzte Eintrag eine Null. Damit entspricht die drittletzte Spalte der Situation in (**). Die einzelnen Ziffern des Übertragsvektors $\tau(\tilde{a})$ sind damit durch die u_j's gegeben. Egal, was $u_2 \in \{0,1\}$ ist, wegen $\beta' > \beta$, ist der Eintrag in der zweiten Spalte Eins. Wegen $a_{2r} < a_1$ folgt auch $a_{2r} + 1 \leq a_1$, also ist der Übertrag in der 1. Spalte Null.

(b) Sei $\beta = \beta'$. Wir erhalten:

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & a_1 & \beta & a_2 & \cdots & a_{2r-2} & a_{2r-1} & \beta' \; a_{2r} \\
- & a_{2r} & \beta' & a_{2r-1} & \cdots & a_3 & a_2 & \beta \; a_1 \\
\hline
\end{array}
$$

Tragen Sie die Übertragsvektoren ein.

(c) Sei $\beta > \beta'$, so erhalten wir:

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & a_1 & \beta & a_2 & \cdots & a_{2r-2} & a_{2r-1} & \beta' \; a_{2r} \\
- & a_{2r} & \beta' & a_{2r-1} & \cdots & a_3 & a_2 & \beta \; a_1 \\
\hline
\end{array}
$$

Damit lassen sich nun die ersten beiden Rekursionen ablesen:

(i) Wir zählen $\psi^0_{2(r+1)}$, siehe S.9;
wir wollen also alle Übertragsvektoren $\tau_{2r+2}(\tilde{a})$ finden, die in der 2. Ziffer ↑ (von links) den Eintrag 0 haben.

- Diese kommen im Fall $\beta > \beta'$ vor. Wieviele Vektoren gibt es hier? Genauso viele wie in (*), also genauso viele verschiedene Vektoren wie für $\tau_{2r}(a)$, da die Vektoren in (*) und im Fall $\beta > \beta'$ in Bijektion zueinander sind. Es sind ψ_{2r} viele.
- Diese Vektoren kommen auch im Fall $\beta = \beta'$ vor, falls $t_2 = 0$ ist. Diese Vektoren entsprechen aber genau den Vektoren im Fall $\beta > \beta'$. Da wir jedes vorkommende Muster $\tau_{2r+2}(\tilde{a})$ nur einmal zählen wollen, ignorieren wir diese.

Es gilt also $\psi^0_{2(r+1)} = \psi_{2r}$.

(ii) Wir zählen $\psi^1_{2(r+1)}$. Wir wollen alle Übertragsvektoren $\tau_{2r+2}(\tilde{a})$ zählen, die in der 2. Ziffer den Eintrag 1 haben.

Die anderen beiden Rekursionsformeln folgen analog.

Indem wir den Übertragsvektor $t^0_{2r+2}(\bar{a})$ in Abhängigkeit der t_i und u_j bestimmen, wiederum in den drei Fällen: $\beta < \beta'$ oder $\beta = \beta'$ oder $\beta > \beta'$.

(a) Sei $\beta < \beta'$. Dann ist:

$$\begin{array}{rcccccccc} & a_1 & \beta & a_2 & \cdots & a_{2r-1} & \beta' & a_{2r} \\ - & a_{2r} & \beta' & a_{2r-1} & \cdots & a_2 & \beta & 0 \\ \hline 0 & 1 & u_2 & & \cdots & u_{2r-1} & 0 & 0 \end{array}$$

(b) Sei $\beta = \beta'$. Dann ist:

$$\begin{array}{rcccccccc} & a_1 & \beta & a_2 & \cdots & a_{2r-1} & \beta' & a_{2r} \\ - & a_{2r} & \beta' & a_{2r-1} & \cdots & a_2 & \beta & 0 \\ \hline 0 & u_2 & u_2 & u_3 & \cdots & u_{2r-1} & 0 & 0 \end{array}$$

(c) Sei $\beta > \beta'$. Dann ist:

$$\begin{array}{rcccccccc} & a_1 & \beta & a_2 & \cdots & a_{2r-1} & \beta' & a_{2r} \\ - & a_{2r} & \beta' & a_{2r-1} & \cdots & a_2 & \beta & 0 \\ \hline 0 & 0 & t_2 & t_3 & \cdots & t_{2r-1} & 1 & 0 \end{array}$$

Es folgen die Rekursionen für $\phi^0_{2(r+1)}$ und $\phi^1_{2(r+1)}$:

(2) Aus Beispiel 5.5 bzw Notation 5.9 wissen wir:

$\psi_4^0 = 1 = F_2$, $\psi_4^1 = 2 = F_3$ und $\psi_4 = \psi_4^0 + \psi_4^1 = 1+2 = 3 = F_4$.

Ein analoges Beispiel zu 5.5 (mit Notation 5.11) ergibt schnell:

$\phi_4^0 = 2 \qquad \phi_4^1 = 1$

Also ist $\phi_4 = \phi_4^0 + \phi_4^1 = 2+1 = 3 = F_4$

Damit ist z.B.

$$\begin{aligned}\psi_6 &= \psi_6^0 + \psi_6^1 \\ &\overset{\text{Rekursion}}{=} \psi_4 + \psi_4^1 + \phi_4 \\ &= F_4 + \underbrace{(F_3 + F_4)}_{=F_5} = F_6\end{aligned}$$

Sei Beh. wahr für $2r$. Dann folgt ganz analog wie für ψ_6:

$\psi_{2r+2} =$

(3) Der Fall n gerade wurde in (2) behandelt. Sei also $n = 2r+1$ eine ungerade Zahl. Sei $a = a_1 \cdots a_n$ mit $a_1 > a_n$. Für $k = r+1$ gilt $a_{n-k+1} = a_{n-(r+1)+1} = a_{2r+1-r} = a_{r+1} = a_k$. Dann ist mit 5.7(b) $t_{r+1} = t_{r+2}$. Die Abbildung $t_1 \cdots t_r t_{r+1} t_{r+2} \cdots t_n \mapsto t_1 \cdots t_r t_{r+2} \cdots t_n$ ist eine Bijektion zwischen existierenden Übertragsvektoren der Längen $2r+1$ und denen der Länge $2r$. Mit (2) folgt also auch die Behauptung für n ungerade.