§5 Geheime Zahlen zum Verzaubern

5.1 Aufgabe: Denken Sie sich eine dreistellige Zahl abc, und halten Sie diese geheim. Hierbei sollte $c<a$ sein. Spiegeln Sie die Zahl, also bilden Sie die Zahl cba. Bilden Sie die Differenz $abc - cba =: def$. Falls Ihr Ergebnis weniger als 3 Ziffern hat zB 99, so schreiben Sie die Zahl dreistellig als 099. Spiegeln Sie die erhaltene Zahl def, also bilden Sie fed, und addieren Sie diese letzten beiden Zahlen, also bilden Sie $def + fed =: xyzt$, Sie erhalten eine Zahl xyzt, die wenigstens dreistellig ist, vielleicht auch vierstellig. Machen Sie die Zahl vierstellig, indem Sie wie oben Nuller vor die Zahl schreiben, falls nötig. Etc. Den restlichen Blödsinn zum Verschleiern will ich nicht wiederholen. Das erhaltene Geheimwort im Buch xy auf Seite t in Zeile z war (fast) immer das wichtige Wort Struktur. Warum?
(Wir bezeichnen xyzt als geheime Zahl.)

5.2 Antwort: (Saftenberger, Günther)

(a) Es ist:

$$abc - cba = \overbrace{(a-c)}\cdot 100 + 0\cdot 10 + \underbrace{(c-a)}_{<0,\text{ aber } >-10.}$$

$$\overset{(*)}{=} \underbrace{(a-c-1)}_{<10,\,\geq 0}\cdot 100 + 90 + \underbrace{(10+c-a)}_{\substack{>0\\<10}}$$

Also ist def die 3-stellige Zahl mit den Ziffern

$$d = a-c-1$$
$$e = 9$$
$$f = 10+c-a$$

Um die Ziffern der Zahl zu bestimmen, müssen wir zu $-10 < c-a < 0$ zehn dazu addieren. Dazu benutzen wir einen Hunderter. Dies erklärt die Gleichung (*).

(b) Jetzt bilden wir def + fed:

$$\begin{aligned} def + fed &= (\underline{a} - \underline{c} - 1 + 10 + \underline{c} - \underline{a}) \cdot 10^2 + 18 \cdot 10^1 \\ &\quad + (10 + \underline{c} - \underline{a} + \underline{a} - \underline{c} - 1) \cdot 10^0 \\ &= 9 \cdot 10^2 + 180 + 9 \\ &= 1089. \end{aligned}$$

Die geheime Zahl ist also 1089.
Der Zaubertrick funktioniert also, weil jeder im 10. Buch im Regal auf Seite 9 in Zeile 8 natürlich dasselbe Substantiv finde

5.3 Bem: In einer Antwort fiel auch der Begriff Übertrag; in der Grundschule lernen wir zu addieren und subtrahieren:

$$\begin{array}{r} a\,b\,c \\ -\;c\,b\,a \\ \hline d\,g\,f \end{array}$$

$0\;1\;1$

Es ist $a > c$. Also müssen wir von a bis 10+c gehen, und haben einen Übertrag. In der 2. Spalte müssen wir von b+1 bis 10+b gehen, haben dabei einen Übertrag. Und natürlich können wir die anderen Ziffern wie oben ausdrücken etc.

Was passiert, wenn wir dasselbe Spiel mit einer vierstelligen Zahl machen?

5.4 Bem: Sei $a_1 a_2 a_3 a_4$ eine 4-stellige Zahl mit $a_1 > a_4$.
Wir wollen die Differenz bilden:

$$\begin{array}{r} a_1\;a_2\;a_3\;a_4 \\ -\;a_4\;a_3\;a_2\;a_1 \\ \hline 0\;\;?\;\;?\;\;1 \end{array}$$

← für Überträge

Übertrag 0 in 1. Spalte

Da $a_1 > a_4$ müssen wir rechnen von a_1 bis $10 + a_4$. Es entsteht ein Übertrag.

Jetzt stocken die Argumente, weil wir nicht wissen:

(a) $a_2 > a_3$ (b) $a_2 = a_3$ (c) $a_2 < a_3$?

5.5 Bsp:

Wir überprüfen die drei Fälle an Beispielen. Schreiben Sie zu jedem Fall aus Bem 5.4 ihre Lieblingszahl hin und berechnen Sie die geheime Zahl aus Aufgabe 5.1 in jedem der drei Fälle. Schreiben Sie alle Übertrage 0 und 1 beim Rechnen hin.

(a) Fall $a_2 > a_3$: (b) Fall $a_2 = a_3$: (c) Fall $a_2 < a_3$:

$$\begin{array}{r} 4712 \\ -\ 2174 \\ 0011 \\ \hline 2538 \end{array} \qquad \begin{array}{r} - \\ 0111 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} - \\ 0101 \\ \hline \end{array}$$

Übertrags-vektoren

$$\begin{array}{r} 2538 \\ +\ 8352 \\ 1001 \\ \hline 10890 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \\ \\ \\ \hline 10989 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \\ \\ 0000 \\ \hline \\ \end{array}$$

Wir wollen zeigen, für $n=4$ sind das alle möglichen geheimen Zahlen.

<u>Erklärung</u> Wir machen die Rechnung im Allgemeinen.

(a)(i) Sei $a_1 > a_4$ und $a_2 > a_3$. Wir subtrahieren:

$$\begin{array}{rcccc} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ - & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \\ & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline & (a_1-a_4) & (a_2-a_3-1) & (9+a_3-a_2) & (10+a_4-a_1) \end{array}$$

Wir rechnen $a_1 + \_\_\_\_ = 10 + a_4$, weil $a_4 < a_1$ ist.

Wir rechnen $a_4 + \_\_ = a_1$, wegen $a_4 < a_1$

Wir rechnen $a_3 + 1 + \_\_\_\_ = a_2$, da $a_3 < a_2$ also auch $a_3 + 1 < a_2$

Wir rechnen $a_2 + 1 + \_\_\_\_ = 10 + a_3$, weil $a_2 > a_3$, also auch $a_2 + 1 > a_3$.

(ii) Jetzt addieren wir:

$$
\begin{array}{rrrrr}
 & a_1-a_4 & a_2-a_3-1 & 9+a_3-a_2 & 10+a_4-a_1 \\
+ & 10+a_4-a_1 & 9+a_3-a_2 & a_2-a_3-1 & a_1-a_4 \\
1 & 0 & 0 & 1 & \\
\hline
1 & 0 & 8 & 9 & 0
\end{array}
$$

Führen Sie die Rechnungen in den Fällen (b) und (c) durch. Notieren Sie die Überträge in Ihren Rechnungen.

Wir rechnen ab hier im B-adischen Zahlensystem, mit $B \geq 2$. Für die Zifferndarstellungen einer Zahl schreiben wir $a_1 a_2 \cdots a_n$ statt $(a_1 a_2 \cdots a_n)_B$, also ohne die Basis B anzugeben, siehe Thm 4.3.

5.6 <u>Notation:</u> Wir definieren $a := a_1 a_2 \cdots a_n$ als n-stellige Zahl mit $a_1 > a_n$, dargestellt im B-adischen Zahlensystem. Wir definieren die Überträge $t_1 t_2 \cdots t_n (t_{n+1})$ bei der Subtraktion aus Aufgabe 5.1 durch:

$$\begin{array}{cccccccc}
 & a_1 & a_2 & \cdots & a_k & \cdots & a_{n-1} & a_n \\
- & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_{n-k+1} & \cdots & a_2 & a_1 \\
 & t_1 & t_2 & t_3 \cdots & t_k\, t_{k+1} & \cdots & t_n & (t_{n+1}) \\
\hline
 & z_0 & z_1 & z_2 & \cdots\ z_k & \cdots & z_{n-1} & z_n
\end{array}$$

(Hierbei ist $t_{n+1} = 0$.) Schreibe $\tau_n(a) := t_1 t_2 \cdots t_n$.

5.7 <u>Lemma:</u> Gegeben a mit $a_1 > a_n$ wie in 5.6. Setze $t_1 \cdots t_n := \tau_n(a)$. Dann gilt:

(a) $t_1 = 0$ und $t_n = 1$

(b) Ist $a_k > a_{n-k+1}$, so ist $t_k = 0$;

ist $a_k < a_{n-k+1}$, so ist $t_k = 1$;

ist $a_k = a_{n-k+1}$, so ist $t_k = t_{k+1}$, für $1 \leq k \leq n$.

(c) Sei z_k die k-te Ziffer der Differenz, definiert in 5.6. Dann ist $z_k = B \cdot t_k + a_k - (a_{n-k+1} + t_{k+1})$ für $1 \leq k \leq n$.

<u>Beweis:</u> Übung.

5.8 <u>Bem</u>:
Was ist unser Ziel? Wir wollen zeigen, berechnet man die geheimen Zahlen in Aufgabe 5.1 für eine n-stellige Zahl (im B-adischen System), so erhält man sehr wenige verschiedene Werte.
Wir haben gesehen:
Für $n = 3$: geheime Zahl ist 1089.
Für $n = 4$: es gibt drei geheime Zahlen
Wieviele geheime Zahlen gibt es für $n \in \mathbb{N}^{\geq 2}$?
Wir zeigen, es gibt so viele geheime Zahlen wie es verschiedene Übertragsvektoren $\tau_n(a) \overset{5.6}{=} t_1 t_2 \dots t_n$ gibt. Wir benötigen weitere Notation:

5.9 <u>Notation</u>:
Sei $\psi_n :=$ Anzahl der verschiedenen Übertragsvektoren $\tau_n(a)$ für verschiedene $a := a_1 \dots a_n$ mit $a_1 > a_n$.
z.B. $\psi_3 = 1$, $\psi_4 = 3$, siehe Bsp 5.2, 5.5.
$\psi_n^0 :=$ Anzahl der verschiedenen Übertragsvektoren $\tau_n(a) = t_1 \dots t_n$ mit $t_2 = 0$,
$\psi_n^1 :=$ Anzahl der verschiedenen Übertragsvektoren $\tau_n(a) = t_1 \dots t_n$ mit $t_2 = 1$.

Im Beispiel 5.5 gilt $\psi_4^0 = 1$
$\psi_4^1 = 2$

Und da Überträge nur 0 oder 1 sind, gilt natürlich nach Definition $\psi_n = \psi_n^0 + \psi_n^1$.

Bevor wir weiter in den Beweis einsteigen können, benötigen wir noch ein weiteres Beispiel.

5.10 Bsp:

In Beispiel 5.5 mußten wir drei Fälle unterscheiden, bei der Berechnung der geheimen Zahlen. Die Rechnungen dort zeigen, daß vermutlich n gerade und n ungerade zu unterscheiden sind. Deshalb betrachten wir als nächstes Beispiel den Fall $n=6$:

$$\begin{array}{cccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \end{array}$$

Hier unterscheiden wir bei der Berechnung der verschiedenen Überträge 9 Fälle:
Es gibt die Paare (a_1, a_6), (a_2, a_5) und (a_3, a_4).
Bei (a_1, a_6) ist der Größenvergleich klar: $a_1 > a_6$. Deshalb ist in Lemma 5.7(a): $t_1 = 0$, $t_n = 1$.
Bei den anderen beiden Paaren (a_k, a_{n+1-k}) gibt es jeweils drei Fälle beim Berechnen des Übertragsvektors zu unterscheiden: $>, =, <$. Siehe auch 5.7.
Damit existieren 3^2 viele verschiedene Muster beim Subtrahieren. Aber nicht jedes liefert einen anderen Übertragsvektor $\tau_n(a)$:
Sei $\beta := B-1$. Betrachte $a \in \{B\beta\beta000, B0\beta000\}$ und berechne $\tau_n(a)$. Wir erhalten:

Wieviele verschiedene Übertragsvektoren existieren für $n=6$?
(Benutzen Sie nur Ziffern aus $\{0, \beta\}$ für die 9 Fälle.)