Wir haben bisher gesehen, wie man homogene und inhomogene lineare Rekursionen lösen kann, zumindest, wenn wir das charakteristische Polynom faktorisieren können und eine Partialbruchzerlegung durchführen können. Im letzten Teil des Kapitels wollen wir einige nützliche Zusammenhänge zwischen Folgen und ihren Erzeugendenfunktionen sammeln und an Beispielen demonstrieren.

3.30 <u>Bem:</u> Seien $(a_n)_{n\geq 0}$ und $(b_n)_{n\geq 0}$ Folgen mit Erzeugendenfunktionen $A = \sum_{n\geq 0} a_n X^n$ und $B = \sum_{n\geq 0} b_n X^n$.

Ist $c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ für $n \geq 0$, so hat die Folge $(c_n)_{n\geq 0}$ die Erzeugendenfunktion $\sum_{n\geq 0} c_n X^n =: C = A \cdot B$. Wir betrachten Spezialfälle:

(a) Gilt hierbei $a_n = b_n$ für alle $n \geq 0$, dann ist A^2 die Erzeugendenfunktion der Folge $(c_n)_{n\geq 0}$ mit $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$.

(b) gilt $b_n = 1$ für alle $n \geq 0$, so ist

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} a_k .$$

Also ist $(c_n)_{n\geq 0}$ die Folge der Partialsummen der a_n's. Nach 3.11 ist dann $B = \sum_{n\geq 0} X^n = \frac{1}{1-X}$, also ist die Erzeugendenfunktion von $(c_n)_{n\geq 0}$ die Funktion $C = A \cdot B = A \cdot \frac{1}{1-X}$.

3.31 <u>Aufgabe:</u> (Jacobson, Lectures in Abstract Algebra, 1951, Seite 19)

gegeben ist eine nicht-assoziative binäre Operation $\circ$, ($\circ: M \times M \to M, (a,b) \mapsto a \circ b$) auf einer Menge M. Ein Ausdruck $x_1 \circ x_2 \circ \ldots \circ x_n$ mit $x_i \in M$ (*) macht nur Sinn, wenn wir Klammern setzen. Wieviele mögliche Klammerungen gibt es für n festgewählte Elemente aus M?

3.32 <u>Bsp:</u> Sei a_n die Anzahl der möglichen Klammerungen von n Elementen aus M. Wir machen Beispiele, um das Problem besser zu verstehen; es macht Sinn zu definieren $a_1 = 1$ und $a_2 = 1$.

- Sei $n = 3$: Hier gibt es die Ausdrücke

  $x_1 \circ (x_2 \circ x_3)$ und $(x_1 \circ x_2) \circ x_3$.

  Es ist also $a_3 = 2$.

- Sei $n = 4$: Hier gibt es die Ausdrücke

Also ist $a_4 = 5$.
Auf den ersten Blick wirkt das Problem kompliziert. Um diese Aufgabe zu lösen, können wir nun mit Hilfe eines Computers weitere Beispiele berechnen und nach Mustern in der Zahlenfolge $(a_n)_{n \geq 2}$ suchen, oder wir versuchen eine Rekursion für a_n zu finden.

3.33 Bem: Seien $n+2$ Elemente $x_1, \dots, x_{n+2}$ gegeben. Dann werden also $n+1$ Operationssymbole $\circ$ verwendet. Wir wollen eine Rekursion für a_{n+1} und setzen hierzu eine erste Klammerung wie folgt:

$$\underbrace{(x_1 \circ \dots \circ x_{k+1})}_{\text{enthält } k \text{ Symbole } \circ} \circ \underbrace{(x_{k+2} \circ \dots \circ x_{n+2})}_{\text{enthält } n-k \text{ Symbole } \circ}$$

Hierbei ist $0 \leq k \leq n$. Die Randfälle sind

$k=0$: $(x_1) \circ (x_2 \circ \dots \circ x_{n+2})$,

$k=n$: $(x_1 \circ \dots \circ x_{n+1}) \circ (x_{n+2})$.

Jetzt haben wir das Problem unterteilt in zwei Probleme gleicher Natur. Wir müssen

- die Anzahl der Klammerungen von $x_1 \circ \dots \circ x_{k+1}$ bestimmen, und
- die Anzahl der Klammerungen von $x_{k+2} \circ \dots \circ x_{n+2}$.

Wir erhalten also die Rekursion

$$(\dagger) \quad a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot a_{n-k}, \quad \text{mit } n \geq 1.$$

Zusätzlich definieren wir

$a_1 = \#$ Klammerungen von $x_1 \circ x_2 = 1$,

$a_0 = \#$ Klammerungen von $x_1 = 1$.

Damit ist $(a_n)_{n \geq 0}$ rekursiv vollständig definiert.

3.34 Antwort:

(a) Gleichung (+) erinnert an die Definition der Faltung in 3.5. Für $A = \sum_{n \geq 1} a_n X^n$ gilt:

$$A^2 = (a_1 X + a_2 X^2 + \dots)(a_1 X + a_2 X^2 + \dots)$$

$$= (a_1^2 X^2 + (a_1 a_2 + a_2 a_1) X^3 + \dots)$$

$$= \sum_{n \geq 2} \left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k} \right) X^n$$

$$\overset{(+)}{=} \sum_{n \geq 2} a_n X^n = A - X, \text{ da } a_1 = 1.$$

$$\Rightarrow A^2 - A - X = 0$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{1-4X}\right).$$

(b) Wir interessieren uns für den Koeffizienten von X^n in $A = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{1-4X}\right)$.

Nach Bsp 3.23 ist

$$(1-4X)^{1/2} = 1 + \binom{1/2}{1}(-4X) + \binom{1/2}{2}(-4X)^2 + \dots$$

$$\Rightarrow [x^n](1-4X)^{1/2} = \binom{1/2}{n}(-4)^n.$$

$$\overset{3.20}{=} \frac{(1/2)(1/2-1)\cdot(1/2-2)\cdot\ldots\cdot(1/2-n+1)}{n!}(-4)^n \cdot \frac{2^n}{2^n}$$

$$= \frac{1\cdot(1-2)(1-4)\cdot\ldots\cdot(1-2n+2)}{2^n \cdot n!}(-4)^n$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}(-1)^n \cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-3)}{2^n \cdot n!} \cdot (4^n)$$

$$= - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-3)}{n!} \cdot 2^n$$

$$= - \frac{(2n-2)!}{2^{n-1}(n-1)!\, n!} \cdot 2^n$$

$$= - 2 \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!}$$

Da a_n positiv ist, ist $A = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1-4x})$

$$\Rightarrow \quad a_n = [x^n]A = [x^n]\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-4x}\right)$$

$$= [x^n]\left(-\frac{1}{2}\sqrt{1-4x}\right)$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot (-2) \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!} = \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!}$$

$$= \frac{1}{n}\binom{2(n-1)}{n-1} =: C_{n-1} = (n-1)\text{te Catalan-Zahl.}$$

3.35 <u>Bem:</u> Aus der Analysis kennen wir weitere Potenzreihen. Beispielsweise ist

$$e^{ax} = \sum_{n \geq 0} \frac{a^n x^n}{n!}$$

$$-\ln(1-ax) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n x^n}{n}.$$

Also ist e^x die Erzeugendenfunktion der Folge $\frac{1}{0!}, \frac{1}{1!}, \frac{1}{2!}, \frac{1}{3!}, \ldots$

3.36 Bsp: Wir wollen mit Hilfe von Erzeugendenfunktionen die Lösung von Aufgabe 2.12, den Hüte-werfenden Fußballfans vereinfachen. Nach Bemerkung 2.14 gilt die Rekursion

$$n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h_{n-k},$$

für gewisse h_n, $n \in \mathbb{N}$, die wir bestimmen wollen. Wir teilen durch $n!$ und erhalten:

$$1 = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n!} \binom{n}{k} h_{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \frac{h_{n-k}}{(n-k)!}, \qquad (*)$$

und interpretieren diesen Ausdruck als den n-ten Koeffizienten in einem Produkt zweier Erzeugendenfunktionen. Es sind hierbei drei Folgen involviert:

(1) $1, 1, 1, \ldots$ hat Erzeugendenfunktion $\sum_{k \geq 0} X^k \underset{3.11}{=} \frac{1}{1-X}$

(2) $\frac{1}{0!}, \frac{1}{1!}, \frac{1}{2!} \ldots$ — " — e^X, siehe 3.35.

(3) $\frac{h_0}{0!}, \frac{h_1}{1!}, \frac{h_2}{2!}$ — " — $B := \sum_{k \geq 0} b_k X^k$,

und die Koeffizienten $b_k = \frac{h_k}{k!}$ wollen wir bestimmen.

Nach (*) und der Definition von Faltung in 3.5 gilt also:

$$\frac{1}{1-X} = \sum_{k \geq 0} X^k = \left(\sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} X^k \right) \left(\sum_{k \geq 0} \frac{h_k}{k!} X^k \right) = e^X \cdot B$$

Wir lösen nach B auf und erhalten:

$$B = \frac{e^{-x}}{1-x} = \left(\sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!}(-x)^k\right)\cdot\left(\sum_{k\geq 0} x^k\right)$$

$$= \left(\sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{k!} x^k\right)\left(\sum_{k\geq 0} x^k\right)$$

Koeffizientenvergleich liefert:

$$b_n = \frac{h_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\cdot 1$$

$$\Rightarrow h_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$, siehe 2.17.

3.37 <u>Bem</u>: Wir definieren die formale Ableitung einer Potenzreihe $A = \sum_{n\geq 0} a_n X^n$ durch $A' := \sum_{n\geq 1} n a_n X^{n-1}$.
Wie in der Analysis kann man für formale Polynome oder Potenzreihen die üblichen Ableitungsregeln beweisen. Es gilt damit:

(a) Die Folge $(c_n)_{n\geq 0}$ mit $c_n = n\cdot a_n$ hat die Erzeugendenfunktion $X\cdot A'$

(b) Die Folge $(c_n)_{n\geq 0}$ mit $c_n = n^2\cdot a_n$ hat die Erzeugendenfunktion $X\cdot(XA')'$.

<u>Beweis</u>:

3.38 <u>Bsp</u>: Die Formel $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ist bekannt von Induktionsbeweisen. Wir zeigen, wie wir sie mit Erzeugendenfunktionen beweisen können:

(a) Sei $a_n = 1$ für alle $n \geq 0$.
Sei $A = \sum_{n \geq 0} a_n X^n = \sum_{n \geq 0} X^n \overset{3.11}{=} \frac{1}{1-X}$.

Nach Bemerkung 3.37 gilt

$$C := X(XA')' = \sum n^2 a_n X^n = \sum n^2 X^n.$$

$\Rightarrow$ C ist die Erzeugendenfunktion der Folge $(c_n)_{n \geq 0}$ mit $c_n = n^2$.

(b) Nach Bemerkung 3.30 bilden wir die Partialsummenfolge $\sum_{k=0}^{n} c_k =: d_n$, $n \geq 0$, mittels der Erzeugendenfunktion $D := C \cdot \frac{1}{1-X}$.
Wir erhalten durch Einsetzen von C:

$$D = \frac{1}{1-X} \cdot X \cdot (XA')' = \frac{X}{1-X} \cdot \left(X \cdot \left(\frac{1}{1-X}\right)' \right)'$$

$$= \frac{1}{1-X} \cdot X \left(\qquad \right)'$$

$$=$$

$$=$$

$$= \frac{X(1+X)}{(1-X)^4}.$$

(c) Wir müssen nun nur noch den Koeffizienten von X^n ablesen:

$$d_n = [X^n]\, D = [X^{n-1}]\, \frac{1+X}{(1-X)^4}$$

$$= [X^{n-1}] \left(\frac{1}{(1-X)^4} + \frac{X}{(1-X)^4} \right)$$

$$= [X^{n-1}]\, \frac{1}{(1-X)^4} + [X^{n-1}]\, \frac{X}{(1-X)^4}$$

$$= [X^{n-1}]\, \frac{1}{(1-X)^4} + [X^{n-2}]\, \frac{1}{(1-X)^4}.$$

$$\overset{3.23}{=} \binom{-4}{n-1} (-1)^{n-1} + \binom{-4}{n-2} (-1)^{n-2}$$

$$\overset{3.22(b)}{=} \binom{n-1+4-1}{n-1} + \binom{n-2+4-1}{n-2}$$

$$= \binom{n+2}{n-1} + \binom{n+1}{n-2} = \binom{n+2}{3} + \binom{n+1}{3}$$

$$= \frac{(n+2)(n+1)n}{6} + \frac{(n+1)\cdot n(n-1)}{6}$$

$$= \frac{n(n+1)}{6}(2n+1).$$

3.39 <u>Übung</u>:

Beweisen Sie mit Erzeugendenfunktionen, daß gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{m+k}{k} = \binom{m+n+1}{m+1}.$$

3.40 Übung: Sei $A := \sum_{n \geq 0} a_n x^n$.

(a) Zeigen Sie, daß $\frac{A(x) + A(-x)}{2}$ die Erzeugendenfunktion der Folge $(b_n)_{n \geq 0}$ ist mit $b_n = \begin{cases} a_n & n \text{ gerade} \\ 0 & n \text{ ungerade} \end{cases}$,

also der Folge $(a_0, 0, a_2, 0, a_4, 0, \dots)$.

(b) Geben Sie die Erzeugendenfunktion der Folge $(c_n)_{n \geq 0}$ an, mit Hilfe von A, wobei

$c_n = \begin{cases} a_n & n \text{ ungerade} \\ 0 & n \text{ gerade} \end{cases}$, dh. $c_n = (0, a_1, 0, a_3, 0, a_5, \dots)$.

(c) Vereinfachen Sie den Ausdruck $\sum_{k \geq 0} \binom{n}{2k} x^{2k}$ mit Hilfe von (a) und berechnen Sie $S_n := \sum_{k \geq 0} \binom{n}{2k}$.

3.41 <u>Bsp</u>: In Kapitel 2 in der Formsarbeit kam die hübsche Identität $F_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n-i}{i}$ auf, mit $F_0 = F_1 = 1$, F_n n-te Fibonacci-Zahl. Hier für fehlt noch ein Beweis. Wir geben einen mittels Erzeugendenfunktionen.

Es ist
$$H := \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{i \geq 0} \binom{n}{i} x^i \right) x^n$$
$$\overset{3.23}{=} \sum_{n \geq 0} (1+x)^n x^n$$
$$= \sum_{n \geq 0} 1 \cdot [(1+x) \cdot x]^n$$
$$\overset{3.11}{=} \frac{1}{1-(1+x)\cdot x}$$
$$= \frac{1}{1-x-x^2}$$

Nach Bsp 3.19 ist dies die charakteristische Gleichung der Fibonacci-Folge. Mit 3.19 folgt also

$$F_n = [x]F = [x]\frac{1}{1-x-x^2} = [x]H$$
$$= \binom{n}{0} \cancel{x^0 x^n} + \binom{n-1}{1} \cancel{x x^{n-1}} + \binom{n-2}{2} \cancel{x^2 x^{n-2}} + \dots$$
$$= \sum_{i=0}^{n} \binom{n-i}{i}$$

<u>Übung</u>: Geben Sie einen direkten Beweis (ohne Erzeugendenfunktionen) für $F_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n-i}{i}$ an.