§ 3 Erzeugendenfunktionen

3.1 Aufgabe:

Die Froschpopulation eines unendlich großen Sees vervierfacht sich jährlich. Am ersten Tag jedes Jahres werden 100 Frösche aus dem See genommen und in einem anderen See ausgesetzt. Angenommen es gab 50 Frösche im Jahr 0 im See, wieviele Frösche hat der See im Jahr 20, im Jahr 2020?

3.2 Bem: Diese Art von Aufgabe kennen wir bereits. Wir können sie mittels einer rekursiven Gleichung leicht beantworten:

Sei $a_n :=$ # der Frösche am Anfang von Jahr n,

also $a_0 := 50$, $a_1 =$ _____,

$a_2 =$ _____

Allgemein gilt: $a_{n+1} =$ _____ für $n \geq 0$.

Mit Hilfe eines Computers können wir nun a_{20} bzw a_{2020} leicht berechnen, beziehungsweise, die Methode aus Bsp 1.5 anwenden, und das Ergebnis mittels Diagonalisierbarkeit von Matrizen versuchen zu berechnen.

3.3 Übung: (a) Bestimmen Sie eine explizite Formel für a_n mittels Diagonalisierung von Matrizen.

(b) Läßt sich der Beweis aus (a) schul-tauglich aufbereiten?

3.4 <u>Bem:</u>

Erzeugendenfunktionen sind ein starkes Instrument, um kombinatorische Abzählprobleme zu behandeln. Wir wollen sehen, wie man für rekursiv definierte Folgen wie in Bsp 3.2 eine explizite Formel mit Hilfe dieser Erzeugendenfunktionen gewinnen kann. Hierbei ist es intuitiv geschickt, die unendlich vielen Folgenglieder $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ zu einem formalen Ausdruck zusammenzufassen, nämlich der sogenannten zugehörigen Potenzreihe

$$A = \sum_{n\geq 0} a_n X^n.$$

Dann manipulieren wir geeignet, beziehungsweise versuchen A besser zu verstehen, und wenn alles gut läuft, verstehen wir am Ende die unendliche Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ besser.

Formale Potenzreihen sind hierbei nicht mit Potenzreihen aus der Analysis zu verwechseln. Wie auch Polynome im Polynomring sind die hier betrachteten Potenzreihen formale Ausdrücke, keine Funktionen, es geht hier entsprechend nicht um Fragen der Konvergenz wie in der Analysis. Um formale Potenzreihen besser zu begreifen, benötigen wir etwas Theorie:

Sei R ein Ring. In Analogie zum Polynomring, siehe z.B. Henke, Algebra-Skript SS2015, Kapitel , definieren wir den Ring der formalen Potenzreihen:

3.5 <u>Thm-Def:</u>

Sei $R[[X]] := \{ \sum_{n \geq 0} a_n X^n \mid a_n \in R \}$ die Menge aller formalen Potenzreihen mit Koeffizienten in R, ausgestattet mit Addition und Multiplikation

$$\sum_{n \geq 0} a_n X^n + \sum_{n \geq 0} b_n X^n = \sum_{n \geq 0} (a_n + b_n) X^n$$

$$\left(\sum_{n \geq 0} a_n X^n\right) \cdot \left(\sum_{n \geq 0} b_n X^n\right) = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) X^n.$$

Dann ist $R[[X]]$ ein Ring.

<u>Beweis</u>: Wie beim Polynomring folgen aus den Ringaxiomen von R die Ringaxiome von $R[[X]]$. Das neutrale Element bezüglich Addition ist die Potenzreihe $\sum_{n \geq 0} a_n X^n$ mit $a_n = 0$, $\forall n \geq 0$. Da die Definition von Multiplikation etwas komplexer ist, ist das Interessanteste beim Axiomenachrechnen die Assoziativität. Wir ver-

weisen auf Henke, Algebra-Skript SS2015.

3.6 <u>Bem.</u>

(a) Formal korrekt sind Potenzreihen Folgen $A = (a_n)_{n \geq 0}$ bzw $A: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$, $A(n) := a_n$. Wir schreiben hierfür stattdessen $A = \sum_{n \geq 0} a_n X^n$. Nach Definition sind zwei Potenzreihen $A = \sum_{n \geq 0} a_n X^n$ und $B = \sum_{n \geq 0} b_n X^n$ gleich, genau dann, wenn $a_n = b_n$ für alle $n \geq 0$.

(b) Die Multiplikation wird als Faltung, Konvolution oder Cauchy-Produkt bezeichnet. Sie entspricht dem "Ausmultiplizieren" und wieder "nach Potenzen sortieren", wie man es von Polynomen in der Schule kennt:

$$(a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \dots)(b_0 + b_1 X + b_2 X^2 + \dots)$$
$$= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) X + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) X^2 + \dots$$

3.7 <u>Def</u>: Wir definieren die Notation

$$[X^i] A := \text{Koeffizient von } X^i \text{ in der Potenzreihe } \sum_{n \geq 0} a_n X^n.$$
$$= a_i.$$

zB $[X^3](-X^7 + 3X^5 - X^4 + 7X^3 - 1) = 7$

3.8 <u>Prop</u>: Sei R ein Integritätsbereich, also ein kommutativer Ring mit Eins, der Nullteilerfrei ist. Dann ist auch $R[[X]]$ ein Integritätsbereich.

<u>Bem</u>: (a) Element $a \in R \setminus \{0\}$ heißt Nullteiler, falls es $b \in R \setminus \{0\}$ gibt mit $ab = 0 = ba$.

(b) Ist K ein Körper, so ist $K[[X]]$ im Allgemeinen kein Körper, aber ein K-Vektorraum, und damit auch eine K-Algebra.

<u>Beweis</u>:

(a) Sei R kommutativ. Seien $A = \sum_{n \geq 0} a_n X^n$, $B = \sum_{n \geq 0} b_n X^n$ aus $R[[X]]$. Dann ist

$$[X^i](AB) = \sum_{k=0}^{i} a_k b_{i-k}$$

$$= a_0 b_i + a_1 b_{i-1} + \dots + a_i b_0$$

$$\overset{R \text{ kommut.}}{=} b_0 a_i + b_1 a_{i-1} + \dots + b_i a_0$$

$$= [X^i](B \cdot A), \quad \forall i \in \mathbb{N}_0.$$

Also ist $AB = BA$, dh. $R[[X]]$ ist kommutativ.

(b) Da R ein Integritätsbereich ist, hat R ein Einselement 1. Sei $1 =: E := \sum_{n \geq 0} b_n X^n$ mit $b_0 = 1$ und $b_n = 0$ für $n \geq 1$ das Einselement von $R[[X]]$, denn

$$A \cdot E = a_0 \cdot \overset{b_0}{1} + (a_0 \cdot \overset{b_1}{0} + a_1 \cdot \overset{b_0}{1}) X + (a_0 \cdot 0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 1) X^2 + \dots$$

$$= a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \dots = A, \ \forall A \in R[[X]]$$

Da $R[[X]]$ kommutiv, folgt $E \cdot A = A$, $\forall A \in R[[X]]$.

Also ist E das Einselement von $R[[X]]$.

(c) Sei $A, B \in R[[X]]$ mit $A \neq 0$ und $B \neq 0$.
(Wie üblich schreibe $A = \sum_{n \geq 0} a_n X^n$, $B = \sum_{n \geq 0} b_n X^n$.)

Dann existieren minimale i und j mit $a_i \neq 0$, $b_j \neq 0$.
Es folgt

$$[X^{i+j}]\, A \cdot B \overset{\text{Def}}{=} \sum_{k=0}^{i+j} a_k b_{i+j-k} = a_i b_j,$$

denn für $k < i$ gilt: _____
für $k > i$ gilt: _____

Da $a_i \neq 0$ und $b_j \neq 0$ und R keine Nullteiler hat, folgt $a_i b_j \neq 0$.
Also ist $A \cdot B = 0$, dh. $R[[X]]$ hat keine Nullteiler.

Wir nehmen im Folgenden an, daß R ein Integritätsbereich ist.

3.9 <u>Def</u>: Ein Element $A \in R[[X]]$ heißt <u>invertierbar</u>, genau dann, wenn es ein $B \in R[[X]]$ gibt mit $A \cdot B = 1 = B \cdot A$.

3.10 <u>Lemma</u>: Die formale Potenzreihe $A = \sum_{n \geq 0} a_n X^n$ ist invertierbar genau dann, wenn der Koeffizient $a_0 \in R$ (in R) invertierbar ist.

<u>Bem</u>: Das multiplikative Inverse eines Elementes eines Rings ist, falls es existiert, eindeutig bestimmt.

Beweis:

(a) Angenommen $A = \sum_{n \geq 0} a_n X^n$ ist invertierbar.

Dann existiert $B = \sum_{n \geq 0} b_n X^n$ mit $AB = E = BA$.

$\Rightarrow \quad a_0 b_0 = [X^0](AB) = 1 = [X^0](BA) = b_0 a_0$

$\Rightarrow$ a_0 ist invertierbar in R.

(b) Sei $a_0 \in R$ invertierbar. Wir suchen $B = \sum_{n \geq 0} b_n X^n$ mit $AB = 1 = BA$. Wir suchen also $b_0 \in R$ mit

$$a_0 b_0 = [X^0](AB) = 1.$$

Wähle $b_0 = a_0^{-1}$.

- Wir suchen weiterhin $b_1 \in R$ mit

$$a_0 b_1 + a_1 b_0 = [X^1](AB) = 0.$$

Dies impliziert $b_1 = a_0^{-1}(-a_1 b_0) = -a_0^{-1}(a_1 b_0)$.

- Wir suchen weiterhin $b_2 \in R$ mit

Dies impliziert $b_2 =$ _____

Ohne Induktion auszuführen folgt induktiv:

Wähle

$$b_n = -a_0^{-1}(a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \ldots + a_n b_0)$$

für $n \in \mathbb{N}_0$

Dann folgt $AB = 1 = BA$.

Bem: Für Inverse von A schreiben wir A^{-1} oder $\frac{1}{A}$.

3.11 <u>Bsp</u>: Sei $A = 1 - x \in R[[X]]$.

Nach 3.10 ist A invertierbar, da $a_0 = 1 \neq 0$.

Der Beweis von 3.10 erlaubt uns das Inverse von A zu berechnen. Sei $B = \sum_{n \geq 0} b_n X^n$ mit $AB = 1$. Dann ist:

$$b_0 = a_0^{-1} = 1^{-1} = 1$$

$$b_1 =$$

$$b_2 =$$

$$\vdots$$

$$b_n =$$

Wir erhalten also $\frac{1}{1-x} = \frac{1}{A} = A^{-1} = \sum_{n \geq 0} x^n$

3.12 <u>Bsp</u>: (Geometrische Summe)

Sei $f = 1 + x + \ldots + x^n$. Dann ist

$$\begin{aligned} f \cdot (1-x) &= (1 + x + \ldots + x^n)(1-x) \\ &= 1 + x + \ldots + x^n \\ &\quad - x - \ldots - x^n - x^{n+1} \\ &= 1 - x^{n+1} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n} x^k = f = \frac{1 - x^{n+1}}{1-x}.$$

3.13 <u>Bem</u>: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ Folge von Elementen aus einem Ring R. Wir nennen

$$A := \sum_{n\geq 0} a_n x^n$$

eine gewöhnliche Erzeugendenfunktion von $(a_n)_{n\geq 0}$

3.14 <u>Bsp</u>: In 3.2 haben wir die Gleichung $a_{n+1} = 4a_n - 100$ gefunden. Wir manipulieren diese Gleichung: Summiere alle diese Gleichungen auf. Wir erhalten

$$\sum_{n\geq 0} a_{n+1} x^{n+1} = \sum_{n\geq 0} 4a_n x^{n+1} - \sum_{n\geq 0} 100 x^{n+1}.$$

Sei $A = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$. Dann ist also

$$A - a_0 = 4x \cdot A - \frac{100x}{1-x}, \qquad (*)$$

und diese letzte Gleichung haben wir durch Einsetzen von $A = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ erhalten.

Wir lösen die Gleichung in $(*)$ nach A auf

$$A(1-4x) = a_0 - \frac{100x}{1-x}$$

$$\Rightarrow \quad A = \frac{a_0}{1-4x} - \frac{100x}{(1-x)(1-4x)},$$

$$= \frac{50}{1-4x} - \frac{100x}{(1-x)(1-4x)}.$$

Wir benutzen Bsp 3.11. Für den 1. Summanden gilt:

$$\frac{a_0}{1-4x} = a_0 \cdot \frac{1}{1-4x} \overset{3.11}{=} a_0 \left(\sum_{n \geq 0} (4x)^n \right)$$

$$= 50 \sum_{n \geq 0} 4^n \cdot x^n$$

Hierbei ist $[x^n]\left(\frac{a_0}{1-4x}\right) = 50 \cdot 4^n$.

Für den 2. Summanden gilt:

$$\frac{100x}{(1-x)(1-4x)} = 100x \cdot \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-4x}$$

$$\overset{3.11}{=} 100x \cdot \left(\sum_{n \geq 0} x^n\right) \cdot \left(\sum_{n \geq 0} 4^n \cdot x^n\right) \qquad (**)$$

Wir benötigen den Koeffizienten von x^n in $(**)$.
Dazu müssen ~~wir~~ $[x^{n-1}]\left(\left(\sum_{n \geq 0} x^n\right)\left(\sum_{n \geq 0} 4^n x^n\right)\right)$ bestimmen. Wir machen dies zunächst mit der Definition der Faltung, also der Multiplikation.
(Später geben wir eine Alternative mittels Partialbruchzerlegung an.)

Es ist $[x^{n-1}]\left(\sum_{n \geq 0} x^n \cdot \sum_{n \geq 0} 4^n x^n\right)$

$$= [x^{n-1}] \sum_{i=0}^{n-1} x^i \cdot 4^{n-1-i} \cdot x^{n-1-i}$$

$$= [x]^{n-1} x^{n-1} \left(\sum_{i=0}^{n-1} 4^{n-1-i} \right)$$

$$= \left(4^{n-1} + 4^{n-2} + \dots + 4^1 + 4^0\right)$$

$$\overset{3.12}{=} \frac{4^n - 1}{3}$$

$$\Rightarrow [x^n] \frac{100x}{(1-x)(1-4x)} = 100 \cdot \frac{4^n - 1}{3}.$$

Insgesamt erhalten wir also

$$a_n = [x^n]\, A = 50 \cdot 4^n - 100 \cdot \frac{4^n - 1}{3}.$$

Insbesondere ist $a_{20} =$

$a_{2020} =$

3.15 <u>Bem</u>: Der Koeffizient des 2. Summanden läßt sich auch mittels Partialbruchzerlegung berechnen. Gesucht sind C, D mit

$$\frac{C}{1-x} + \frac{D}{1-4x} = \frac{100x}{(1-x)(1-4x)}.$$

Multiplikation mit $(1-x)$ und $(1-4x)$ ergibt:

$$C(1-4x) + D(1-x) = 100x$$

$$\Rightarrow (-D-4C) \cdot x + (C+D) = 100x$$

Koeffizientenvergleich liefert:

$$\left| \begin{array}{l} -D-4C = 100 \\ C+D = 0 \end{array} \right| \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $C =$ _____ , $D =$ _____

Also ist

$$\frac{100x}{(1-x)(1-4x)} = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$\Rightarrow [x^n] \frac{100x}{(1-x)(1-4x)} = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$