§ 2 Binomialkoeffizienten

Woher kommen komplizierte oder vielleicht besser komplexe mathematische Identitäten, mathematische Resultate oder Beweise? Wie findet man so etwas?

Im letzten Kapitel und den Übungen haben wir gesehen, daß Bilder viel Information enthalten können.
Gauss, auf den viele berühmte Resultate zurückgehen, wird nachgesagt, daß er viel gerechnet hat. Hierbei entstehen Bilder im Kopf. Abstrakte Bilder.

In diesem Kapitel betrachten wir Binomial-Koeffizienten und schauen uns wieder mehrere Beweise zu einem Resultat an. Diesmal kommen die Beispiele aus der Kombinatorik, die uns zum einen abstrakte Bilder zeigt, die Formeln erklären können, und zum anderen weitere Beispiele liefert um Beweise zu vergleichen.

Zum einen unterscheiden sich Beweise dadurch, daß Methoden aus verschiedenen mathematischen Gebieten kommen: aus der Zahlentheorie, Linearen Algebra, Analysis, Geometrie, Kombinatorik ...

Fragen zum Vergleichen von Beweisen könnten aber auch sein:

- Welche zentralen mathematischen Sätze gehen ein? In welcher Jahrgangsstufe in der Schule sind diese zugänglich?
- Lassen sich verschiedene Erkenntnisse aus den verschiedenen Beweisen gewinnen?
- Welchen Beweis kann man für den Schulunterricht aufbereiten? In welcher Jahrgangsstufe? Mit welcher Zielsetzung?

2.1 <u>Def</u>: Für $k \in \mathbb{N}$ definieren wir $k! = k(k-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1$.
Wir definieren $0! = 1$.

Eine bisweilen hilfreiche Notation ist auch
$$r^{\underline{k}} := \underbrace{r(r-1)\cdot(r-2)\cdot\ldots\cdot(r-k+1)}_{k \text{ Faktoren}}, \quad r \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{Z}^{\geq 0}.$$

2.2 <u>Bsp</u>: Auf wieviele Arten können wir eine 2-elementige Teilmenge aus der Menge $\{1,2,3,4\}$ auswählen?
Die zwei-elementigen Teilmengen sind:

Es gibt also ___ verschiedene Möglichkeiten.

2.3 <u>Def</u>: Der <u>Binomialkoeffizient</u> $\binom{n}{k}$ mit $0 \leq k \leq n$, und $k, n \in \mathbb{N}_0$, ist definiert als die Anzahl der Möglichkeiten eine k-elementige Teilmenge aus einer n-elementigen Menge zu wählen.

2.4 <u>Lemma</u>:
Es ist $\binom{n}{k} = \dfrac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k\cdot(k-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1} = \dfrac{n^{\underline{k}}}{k!} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

<u>Beweis</u>: Sei $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ eine n-elementige Menge.
Wir zählen die Möglichkeiten eine k-elementige Folge von Elementen $x_1, x_2, \ldots, x_k$ aus X auszuwählen, ohne Zurücklegen:

\# Möglichkeiten x_1 aus X auszuwählen ist: ___
\# — " — x_2 — " — ist: ___
etc.
\# — " — x_k aus X auszuwählen ist: ___

Da jede k-elementige Teilmenge ___ viele verschiedene Anordnungen der Elemente hat, folgt:

$$\binom{n}{k} = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

#

2.5 <u>Bem</u>: Häufig ordnet man Binomialkoeffizienten im Pascalschen Dreieck an:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & & \\
\binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} \\
\binom{6}{0} & & \binom{6}{1} & & \binom{6}{2} & & \binom{6}{3} & & \binom{6}{4} & & \binom{6}{5} \quad \binom{6}{6}
\end{array}
=
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
1 & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & 6 & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}$$

etc.

Es lassen sich einige Formeln ablesen. Welche? Beweisen Sie Ihre Beobachtungen!

Im gezeichneten Hexagon gilt: $4 \cdot 15 \cdot 10 = 6 \cdot 5 \cdot 20$. Zufall? Oder gilt dies immer? Fall ja, Beweis?

Wir betrachten ein weiteres Beispiel eines kombinatorischen Beweises:

2.6 <u>Thm</u>: Für geeignete ganze Zahlen n, m, k gilt:

$$\binom{n+m}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{m}{k-i}.$$

<u>Bem</u>: Wir könnten für alle ganzen Zahlen n, m, k dieses Resultat beweisen, falls wir die Definition $\binom{n}{k}$ geeignet anpassen.

<u>Beweis</u>:

Eine Gruppe besteht aus m Frauen und n Männern. Die linke Seite zählt die Anzahl der Möglichkeiten k Leute aus dieser Gruppe auszuwählen.

Auf der rechten Seite der Gleichung beschreibt der i-te Summand die Anzahl der Möglichkeiten __ Männer aus der Menge der __ Männer und __ Frauen aus der Menge von __ Frauen auszuwählen. Durch Summieren über i mit $0 \leq i \leq k$ zählen wir dasselbe wie auf der linken Seite.

#

Nachdem wir einige bekanntere Standard-Identitäten zusammengetragen haben, geben wir hier noch eine weniger bekannte Identität an, und geben einen kombinatorischen Beweis:

27 <u>Thm</u>: Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}.$$

<u>Bem</u>: (a) Beachte, es ist in dieser Formel nicht einmal ersichtlich, warum $\dfrac{\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k}}{2^{n-1}}$ eine natürliche Zahl ist!

(b) Vermutlich tendiert man dazu, dies durch Nachrechnen zu beweisen, inklusive Induktion. Hier ein kombinatorischer Beweis. Wir beweisen eine solche Identität, indem wir zeigen, daß auf zwei verschiedene Art und Weisen dasselbe gezählt wird. Das haben wir bereits in 2.6 so gemacht.

<u>Beweis</u>:

Beide Seiten der Identität zählen die Anzahl der Möglichkeiten aus einer Gruppe von n Teilnehmern ein Komitee auszuwählen, und dann aus diesem einen Präsidenten zu bestimmen.

(a) Auf der linken Seite der Gleichung wählen wir zunächst ein k-elementiges Komitee aus n Menschen aus. Hierfür gibt es ___ viele verschiedene Möglichkeiten. Aus dem Komitee wählen wir nun den Präsidenten aus. Hierzu gibt es ___ viele verschiedene Möglichkeiten.

(b) Auf der rechten Seite der Gleichung wählen wir aus n Menschen zunächst den Präsidenten aus. Hierfür gibt es ___ viele Möglichkeiten. Aus den verbliebenen n-1 Menschen wählen wir jetzt ein Komitee aus. Hierfür gibt es ___ viele verschiedene Möglichkeiten.

2.8 Übung:

(a) Überlegen Sie sich kombinatorische Beweise zu den in 2.5 angegebenen Identitäten.

(b) Im allerletzten Schritt in (b) benutzen wir eine bekannte Identität. Welche? Und wie beweisen Sie diese?

2.9 <u>Thm</u> (Binomischer Lehrsatz)

Sei n eine nicht-negative ganze Zahl. Es gilt:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

<u>Beweis</u>:

Betrachte das Produkt von n Summanden:

$$\underbrace{(x+y)\cdot(x+y)\cdot\ \ldots\ \cdot(x+y)}_{n \text{ mal}}$$

Beim Berechnen dieses Produktes nehmen wir einen Summanden aus jeder Klammer, und multiplizieren diese dann zusammen. Dann wiederholen wir das in allen 2^n Möglichkeiten, und summerieren alle erhaltenen Produkte auf. Hierbei erhalten wir ein Produkt $x^k y^{n-k}$ jedes mal, wenn wir genau k Summanden x aus den n vielen Klammern ausgewählt haben. Es gibt also $\binom{n}{k}$ viele Summanden $x^k y^{n-k}$.

#

Diesen Satz haben Sie bereits in verschiedenen Vorlesungen im Studium getroffen. In diesem Kapitel interessieren uns Identitäten, die Binomialkoeffizienten beinhalten. Der Binomische Lehrsatz kann helfen Identitäten dieser Art zu beweisen. Wir geben ein Beispiel:

2.10 Bsp: Wir beweisen Thm 2.7 mit Hilfe des Binomischen Lehrsatzes 2.9, und wählen hier $y = 1$. Dann gilt:

$$(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.$$

Beide Seiten sind differenzierbare Funktionen in der Variablen x, und ableiten nach der Variablen x liefert:

$$n(x+1)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} x^{k-1}.$$

Wähle $x = 1$, dann folgt:

$$n \cdot 2^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k \cdot \binom{n}{k}.$$

Dies zeigt Thm 2.7.

2.11 Übung:

(a) Beweisen Sie für alle $n \geq 2$:

$$2^{n-2} \cdot n \cdot (n-1) = \sum_{k=2}^{n} k(k-1) \binom{n}{k}.$$

(b) Seien k, m, n nicht-negative ganze Zahlen mit $k + m \leq n$. Beweisen Sie:

$$\binom{n}{m}\binom{n-m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m}.$$