9. Übungsblatt zur Algebra II

Mikhail Gorskii, Anne Henke, SS 2019

1. Betrachten Sie den Kreisteilungskörper $L := \mathbb{Q}(\zeta)$ über $\mathbb{Q}$ mit $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{7}}$.
   (a) Zeigen Sie, dass die Körpererweiterung $L/\mathbb{Q}$ galoisch ist, und bestimmen Sie die Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}(L/\mathbb{Q})$. Zeigen Sie hierbei, dass $\mathrm{Aut}(L/\mathbb{Q})$ zyklisch ist.
   (b) Zeichnen Sie das Diagram der Zwischenkörper der Körpererweiterung $L/\mathbb{Q}$, und geben Sie hierbei jeweils an, welcher Zwischenkörper zu welcher Untergruppe korrespondiert.
   (c) Welche der Zwischenkörper von $L/\mathbb{Q}$ sind galoisch über $\mathbb{Q}$? Verwenden Sie nur die Mittel des Hauptsatzes der Galoistheorie in Ihrem Beweis.
   (d) Für jeden Zwischenkörper Z von $L/\mathbb{Q}$, bestimmen Sie ein Polynom f über $\mathbb{Q}$ derart, dass Z der Zerfällungskörper von f über $\mathbb{Q}$ ist.

2. Sei K Körper mit $\mathrm{char}(K) = 0$, sei L eine Galoiserweiterung von K mit $|\mathrm{Aut}(L/K)| = 20$.
   (a) Zeigen Sie, dass es einen Teilkörper F von L gibt mit $[F : K] = 5$.
   (b) Gibt es auch einen Teilkörper E von L mit $[E : K] = 10$?

3. Sei $\zeta = e^{2\pi i/9}$. Zeigen Sie mit Hilfe von Galoistheorie, dass $\sqrt[3]{5}$ nicht im Körper $\mathbb{Q}(\zeta)$ liegt.

4. Konstruieren Sie innerhalb eines Kreisteilungskörpers $\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}$ eine Galoiserweiterung L über $\mathbb{Q}$ mit $\mathrm{Aut}(L/\mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Z}_5$, und geben Sie auch ein primitives Element $\alpha \in L$ an mit $L = \mathbb{Q}(\alpha)$.

5. (Schriftlich, 12 Punkte.) Sei p ein Primzahl, $f(X) = X^p - 2 \in \mathbb{Q}[X]$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\mathrm{Gal}(f) \simeq \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}_p, a \neq 0 \right\}.$$

   Geben Sie eine Zerlegung von $\mathrm{Gal}(f)$ als semidirektes Produkt von zwei echten Untergruppen an. Realisieren Sie $\mathrm{Gal}(f)$ als Untergruppe in S_p. Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

   (*Optional: Gelten die Aussagen der Aufgabe auch falls p eine beliebige natürliche Zahl ist?*)

Abgabe der schriftlichen Aufgabe erfolgt in der Vorlesung am Dienstag 25.Juni 2019, bis spätestens 11:30, oder in einer der vorher stattfindenden Vorlesungen.