8. Übungsblatt zur Algebra II

Mikhail Gorskii, Anne Henke, SS 2019

1. Sei G eine Gruppe der Ordnung pqr mit $p > q > r$ Primzahlen. Sei n_p, n_q und n_r jeweils die die Anzahl der Sylowuntergruppen zu den Primzahlen p, q beziehungsweise r.
   (a) Angenommen keine Sylowuntergruppe von G ist normal in G; zeigen Sie mit Hilfe der Sylowsätze, dann ist $n_p = qr$, $n_q \geq p$ und $n_r \geq q$. Folgern Sie durch Abzählen der Elemente vorgegebener Ordnung, dass G nicht einfach ist.
   (b) Zeigen Sie mit Hilfe der Untergruppenkorrespondenz, dass G eine eindeutige Untergruppe N der Ordnung p besitzt. Warum ist N ein Normalteiler in G?
   (c) Zeigen Sie, dass G auflösbar ist.

2. Sei G eine auflösbare Gruppe und N ein minimaler nicht trivialer Normalteiler von G.
   (a) Zeigen Sie, die Kommutatorgruppe N' ist normal in G; folgern Sie, dass N abelsch ist.
   (b) Sei G endlich. Zeigen Sie, dass es eine Primzahl p gibt und ein $k \in \mathbb{N}$ mit $|N| = p^k$.
   (c) Zum Beispiel in dem Sie zeigen, dass $pN := \{px \mid x \in N\}$ eine charakteristische Untergruppe von $(N, +)$ ist, folgern Sie, dass $N \simeq \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \times \ldots \times \mathbb{Z}_p$ ist. Hierbei definieren wir $px := \underbrace{x + \ldots + x}_{p \text{ mal}}$.

3. Sei $f \in \mathbb{Q}[X]$ ein unzerlegbares Polynom, das in $\mathbb{C}$ sowohl reelle als auch komplexe Nullstellen besitzt. Zeigen Sie, dass komplexe Konjugation ein Automorphismus in $\mathrm{Gal}(f)$ ist. Folgern Sie, dass die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(f)$ nicht abelsch ist.

4. (Schriftlich, 12 Punkte.) Welche der folgenden Polynome sind unzerlegbar über $\mathbb{Q}$? Bestimmen Sie für jedes Polynom den Zerfällungskörper L über $\mathbb{Q}$, den Grad der Körpererweiterung $[L : \mathbb{Q}]$ und den Isomorphietyp der Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}(L/\mathbb{Q})$. Begründen Sie hierbei jeweils Ihre Antwort.
   (a) $x^3 - a$, für $a \in \mathbb{N}$;
   (b) $x^3 - x - 1$;
   (c) $x^3 - 2x - 1$;
   (d) $x^4 + x^2 - 6$;
   (e) $x^4 - x^2 - 1$.

5. Sei $a = \sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$.
   (a) Beweisen Sie, dass gilt $\mathbb{Q}(a) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{3})$.
   (b) Bestimmen Sie den Grad $[\mathbb{Q}(a) : \mathbb{Q}(\sqrt{2})]$ und die Elemente von $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}(a)/\mathbb{Q}(\sqrt{2}))$.
   (c) Benutzen Sie Teil (b), um das Minimalpolynom von a über $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ zu konstruieren.
   (d) Bestimmen Sie auch das Minimalpolynom von a über $\mathbb{Q}$.

Abgabe/Besprechung: Dienstag 18.Juni 2019.