7. Übungsblatt zur Algebra II

Mikhail Gorskii, Anne Henke, SS 2019

1. Beweisen Sie die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung einer natürlichen Zahl n mittels des Satzes von Jordan-Hölder.

2. Sei G eine Gruppe und n eine natürliche Zahl. Eine Untergruppe U in G heißt *charakteristisch*, falls $\varphi(U) \subseteq U$ für alle $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$.

   (a) Zeigen Sie, dass jede charakteristische Untergruppe in G ein Normalteiler von G ist. Gilt auch die Umkehrung? Begründen Sie Ihre Antwort.

   (b) Zeigen Sie, die Kommutatorgruppe G' ist eine charakteristische Untergruppe von G.

   (c) Bestimmen Sie die erste Kommutatorgruppe von A_3, A_4, Q_8, Q_{12} und D_{2n}.

3. (Schriftlich, 10 Punkte.) Sei G eine endliche Gruppe, $N \triangleleft G$ und p prim. Zeigen Sie:

   (a) Gruppe G ist auflösbar, genau dann, wenn N und G/N auflösbar sind.

   (b) Ist G eine p-Gruppe, so ist G auflösbar.

   (c) Ist $|G| \in \{18, 24, 36\}$, so ist G auflösbar.

4. Sei K ein Körper der Charakteristik Null, sei $L = K(z)$ mit $z^n \in K$ eine einfache Radikalerweiterung. Sei ζ eine primitive n-te Einheitswurzel und $\zeta \in K$.

   (a) Zeigen Sie, dass L/K galoisch ist.

   (b) Sei $F : \mathrm{Aut}(L/K) \to (\mathbb{Z}_n, +)$ definiert durch $F(\sigma) = l$, wobei $\sigma(z) = \zeta^l z$ ist. Zeigen Sie, dass F ein injektiver Gruppenhomomorphismus ist.

   (c) Ist $\mathrm{Aut}(L/K) \simeq \mathbb{Z}_n$? Begründen Sie Ihre Antwort.

5. In dieser Potpourri-Aufgabe wiederholen wir Konzepte aus der Körpertheorie, üben aber auch neue Konzepte aus der Vorlesung. Sei $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)$ und $a = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \in L$.

   (a) Ist $i \in \mathbb{Q}(\sqrt{-2})$? Ist $a \in \mathbb{Q}(\sqrt{-2})$?

   (b) In beliebiger Reihenfolge: Bestimmen Sie eine $\mathbb{Q}$-Basis von L, sowie eine $\mathbb{Q}(\sqrt{-2})$-Basis von L. Bestimmen Sie die Grade $[L : \mathbb{Q}]$, $[L : \mathbb{Q}(\sqrt{2})]$, $[L : \mathbb{Q}(i)]$ und $[L : \mathbb{Q}(\sqrt{-2})]$.

   (c) Bestimmen Sie explizit die Elemente von $\mathrm{Aut}(L/\mathbb{Q}(i))$ und $\mathrm{Aut}(L/\mathbb{Q}(\sqrt{-2}))$.

   (d) Sei $\min_K(a)$ das Minimalpolynom von a über dem Körper K. Bestimmen Sie die Minimalpolynome $\min_{\mathbb{Q}(i)}(a)$ und $\min_{\mathbb{Q}(\sqrt{-2})}(a)$.
   (*Können Sie dieser Aufgabe mit Hilfe von Galoistheorie lösen?*)

   (e) Bestimmen Sie mittels des Satzes vom primitiven Element ein $c \in \mathbb{Q}(i, \sqrt{2})$ mit $L = \mathbb{Q}(c)$. Bestimmen Sie auch das Minimalpolynom von c über $\mathbb{Q}$.

Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.