6. Übungsblatt zur Algebra II

Mikhail Gorskii, Anne Henke, SS 2019

1. Sei G eine endliche Gruppe und sei p eine Primzahl mit p teilt $|G|$.

   (a) Zeigen Sie, dass Konjugation eine Gruppenwirkung von G auf der Menge $\mathrm{Syl}_p(G)$ der p-Sylowgruppen von G definiert.

   (b) Sei G eine Gruppe der Ordnung 72. Zeigen Sie, dass G nicht einfach ist.

   (c) Sei G eine Gruppe der Ordnung 48. Zeigen Sie, dass G einen Normalteiler der Ordnung 8 oder 16 hat.

2. Sei G eine Gruppe der Ordnung 385. Zeigen Sie, dass jede Sylow-7-Untergruppe von G im Zentrum von G liegt.

3. Sei G eine Gruppe und seien $\{e\} \lhd G_1 \lhd G$ und $\{e\} \lhd H_1 \lhd \cdots \lhd H_r = G$ Kompositionsreihen von G.

   (a) Zeigen Sie, dass $r \geq 2$ ist. Zeigen Sie auch, dass falls $H_{r-1} = G_1$ ist, dann gilt $r = 2$.

   (b) Angenommen $H_{r-1} \neq G_1$. Zeigen Sie, dass $H_{r-1} \cap G_1 = \{e\}$ und $H_{r-1}G_1 = G$ ist. Folgern Sie, dass $r = 2$ ist.

   [*Sie dürfen bei dieser Aufgabe nicht den Satz von Jordan–Hölder verwenden.*]

4. (Schriftlich, 13 Punkte.)

   (a) Bestimmen Sie jeweils eine Kompositionsreihe von $\mathbb{Z}_{20}$, D_{40}, D_{4038}, $A_4 \times D_{40}$ und

   $$G_2 = \langle x, y \mid x^6 = 1, x^3 = y^2, yx = x^{-1}y \rangle, \text{ (siehe Blatt 3, Aufgabe 6).}$$

   (b) Bestimmen Sie alle Kompositionsreihen von D_8 und Q_8.

   (c) Zeigen Sie, dass eine Normalreihe von maximaler Länge eine Kompositionsreihe ist.

5. Sei G eine Untergruppe von S_7 erzeugt durch die beiden Permutationen $x = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$ und $y = (2, 6, 5, 7, 3, 4)$. Bestimmen Sie einen echten, nicht-triviale Normalteiler N von G, und verfeinern Sie die gefundene Normalreihe $1 \lhd N \lhd G$ zu einer Kompositionsreihe von G. Was sind die Isomorphietypen der Kompositionsfaktoren von G? Um welche Gruppe G handelt es sich?