5. Übungsblatt zur Algebra II
Mikhail Gorskii, Anne Henke, SS 2019

1. Bestimmen Sie jeweils alle Gruppenerweiterungen G von C_4 mit C_2 und von C_2 mit C_4, das heisst, geben Sie jeweils den Isomorphietyp der Gruppe G an, einen Monomorphismus ι und einen Epimorphismus π, so dass die Sequenzen

$$1 \longrightarrow C_4 \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow{\pi} C_2 \longrightarrow 1 \qquad \text{bzw.} \qquad 1 \longrightarrow C_2 \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow{\pi} C_4 \longrightarrow 1$$

kurz exakt sind. Entscheiden Sie jeweils, ob die kurz exakte Sequenz zerfällt, und wenn ja, geben Sie den Schnitt s an. Gibt es eine zerfallende kurz exakte Sequenz der Form

$$1 \longrightarrow N \xrightarrow{\iota} C_8 \xrightarrow{\pi} H \longrightarrow 1? \qquad \text{bzw.} \qquad 1 \longrightarrow N \xrightarrow{\iota} Q_8 \xrightarrow{\pi} H \longrightarrow 1?$$

2. (Schriftlich, 8 Punkte.)
   (a) Bestimmen Sie in S_4 alle Untergruppen der Ordnung 8.
   (b) Bestimmen Sie jeweils alle 3-Sylowgruppen der folgenden Gruppen: C_{18}, D_{18}, $C_3 \times C_6$, $C_3 \times S_3$ und $E := \langle g, h, x \mid g^3 = h^3 = x^2 = 1, xgx = g^2, xhx = h^2, gh = hg \rangle$.
   (c) Sei G eine Gruppe der Ordnung 18 mit normaler Sylowgruppe $P = \langle x \mid x^9 = 1 \rangle$ und $y \in G$ von Ordnung zwei. Dann ist $yxy \in P$, also $yxy = x^a$ für ein a mit $1 \leq a \leq 8$. Bestimmen Sie alle Werte, die a annehmen kann, und für jeden möglichen Wert von a bestimmen Sie den Isomorphietyp von G.

3. Sei G eine Gruppe der Ordnung 20.
   (a) Zeigen Sie, dass G immer ein semidirektes Produkt zweier echter Untergruppen ist.
   (b) Zeigen Sie, dass es bis auf Isomorphie genau zwei nicht-abelsche äussere semidirekte Produkte der Formen $C_5 \rtimes C_4$ gibt. Bestimmen Sie jeweils eine Präsentation dieser Gruppen. Warum sind die beiden Gruppen nicht isomorph zueinander?

   (*Optional:* Klassifizieren Sie die Gruppen der Ordnung 20.)

4. Sei G eine endliche Gruppe und sei p eine Primzahl, die $|G|$ teilt.
   (a) Wenn keine der Sylowuntergruppen in G normal ist, bedeutet dies, dass die Gruppe einfach ist?
   (b) Sei N eine normale p-Untergruppe von G. Zeigen Sie, dass N in jeder p-Sylowuntergruppe von G liegt.
   (c) Sei N eine normale Untergruppe von G und P eine p-Sylowuntergruppe von N. Zeigen Sie, dass wenn P eine normale Untergruppe von N ist, P auch eine normale Untergruppe von G ist.
   (d) Sei N eine normale Untergruppe und S eine Sylowuntergruppe von G. Zeigen Sie, dass $N \cap S$ eine Sylowuntergruppe von N ist.

5. In der Nacht als Scheherezade zum ersten Mal in Schahryârs Palast kam, gab er ihr eine additive Gruppe G der Ordnung 1001 und liess Sie ein Element wählen. Jede Nacht danach addiert Sie dasselbe Element zum Ergebnis aus der Nacht davor und sagt das neue Ergebnis Schahyâr. Wenn Sie zum zweiten Mal dasselbe Ergebnis sagt, wird Sie im Morgengrauen enthauptet; sonst lässt er Sie einen weiteren Tag leben. Zeigen Sie, dass Scheherezade, unabhängig von G, in der ersten Nacht eine solche Wahl treffen kann, dass Sie alle 1001 Nächte überleben wird (und sie heiraten und glücklich bis ans Ende ihrer Tage leben werden).

Abgabe der schriftlichen Aufgabe erfolgt in der Vorlesung am Dienstag 21.Mai 2019, bis 11:30.