4. Übungsblatt zur Algebra II

Mikhail Gorskii, Anne Henke, SS 2019

1. In dieser Aufgabe geht es um innere semidirekte Produkte. Im ersten Aufgabenteil könnte es hilfreich sein, jeweils den Untergruppenverband der gegebenen Gruppe zu zeichnen und darin jeweils die normalen Untergruppen zu markieren.

   (a) Falls existent, geben Sie jeweils alle möglichen Zerlegungen der Gruppen C_4, V_4, S_3, Q_8, D_8, $\mathbb{Z}_{12}$ als semidirektes Produkt von jeweils zwei echten Untergruppen an. Welche der Zerlegungen sind direkte Produkte? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

   (b) Sei K ein Körper. Zeigen Sie, dass $GL_n(K) \simeq SL_n(K) \rtimes K^\times$ ist.

2. Sei G eine endliche Gruppe. Wir definieren den Homomorphismus $\varphi : G \to \mathrm{Aut}(G)$ durch $\varphi(g) = c_g$, wobei c_g der Konjugationshomomorphismus ist, also definiert durch $c_g(x) = gxg^{-1}$ für $x, g \in G$.

   (a) Bestimmen Sie $\ker(\varphi)$, und zeigen Sie, dass $\mathrm{Inn}(G) := \mathrm{im}(\varphi)$ ein Normalteiler in $\mathrm{Aut}(G)$ ist. Man bezeichnet $\mathrm{Inn}(G)$ als die Gruppe der *inneren Automorphismen* von G.

   (b) Bestimmen Sie den Isomorphietyp der Gruppen $\mathrm{Inn}(S_3)$, $\mathrm{Aut}(S_3)$, $\mathrm{Inn}(A_4)$ und $\mathrm{Aut}(A_4)$.

3. (Schriftlich, 12 Punkte.) Seien G, H_1 und H_2 Gruppen mit H_1, H_2 endlich. Die Menge $\mathrm{Aut}(G)$ aller Automorphismen von G ist eine Gruppe bezüglich Komposition von Abbildungen.

   (a) Sei G eine zyklische Gruppe und $\tau \in \mathrm{Aut}(G)$. Zeigen Sie, ist x ein Erzeuger von G, so ist auch $\tau(x)$ ein Erzeuger von G. Was lässt sich über die Bilder der Erzeuger einer nicht-zyklischen Gruppe $G = \langle a, b\rangle$ sagen?

   (b) Sei $\mathrm{ggt}(|H_1|, |H_2|) = 1$. Zeigen Sie, dann gilt $\mathrm{Aut}(H_1 \times H_2) \simeq \mathrm{Aut}(H_1) \times \mathrm{Aut}(H_2)$.

   (c) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_n)$ und $\mathbb{Z}_n^\times$ isomorphe Gruppen sind. Bestimmen Sie den Isomorphietyp der Gruppen $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z})$, $\mathrm{Aut}(C_9)$, $\mathrm{Aut}(C_{10})$, $\mathrm{Aut}(C_2 \times C_2)$ und $\mathrm{Aut}(C_2 \times C_{10})$.

4. (a) Seien H und N Gruppen, sei $\varphi : H \to \mathrm{Aut}(N)$ ein Homomorphismus und $f \in \mathrm{Aut}(H)$. Zeigen Sie, dass die Abbildung

   $$F : N \rtimes_\varphi H \longrightarrow N \rtimes_{\varphi\circ f} H, \qquad (n,p) \mapsto (n, f^{-1}(p))$$

   ein Isomorphismus von Gruppen ist.

   (b) Bestimmen Sie bis auf Isomorphie alle äusseren semidirekten Produkte der Formen:

   $$C_4 \rtimes_\varphi C_3, \quad (C_2 \times C_2) \rtimes_\varphi C_3,$$

   wobei φ jeweils alle geeigneten Homomorphismen durchläuft.

5. Sei G eine endliche Gruppe. Seien m, n teilerfremde natürliche Zahlen.

   (a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{ggt}(|G|, n) = 1$ ist, genau dann, wenn $\mathrm{ggt}(\mathrm{ord}_G(g), n) = 1$ für alle $g \in G$.

   (b) Sei nun G eine abelsche Gruppe der Ordnung mn. Zeigen Sie, dass es eine *eindeutige* Untergruppe H der Ordnung n und eine *eindeutige* Untergruppe K der Ordnung m gibt, so dass G das innere direkte Produkt von H und K ist.

   Hinweis: Um die Gruppen H und K zu definieren, unterscheiden Sie die Elemente von G durch ihre Elementordnungen.

Abgabe der schriftlichen Aufgabe erfolgt in der Vorlesung am Dienstag 14.Mai 2019, bis 11:30.