3. Übungsblatt zur Algebra II

Mikhail Gorskii, Anne Henke, SS 2019

1. Sei $\sigma \in S_n$ vom Zykeltyp $\lambda = (m^{a_m}, \dots, 2^{a_2}, 1^{a_1})$. Sei $\mathcal{C}_\sigma$ die Konjugationsklasse von σ in S_n. (Zum Beispiel ist $\lambda = (6^1, 5^3, 4^0, 3^0, 2^4, 1^1) = (6, 5, 5, 5, 2, 2, 2, 2, 1)$.)
   (a) Bestimmen Sie den Zentralisator von $(1, 2, 3)$ in S_5.
   (b) Bestimmen Sie auch den Zentralisator von $(1, 2, 3)(4, 5, 6)$ in S_7.
   (c) Bestimmen Sie mit Hilfe des Bahnensatzes eine Formel für $|\mathcal{C}_\sigma|$.

2. Sei G eine Gruppe und seien H und K Untergruppen von G. Für $(h, k) \in H \times K$ und $x \in HK = \{hk \mid h \in H, k \in K\} \subseteq G$ definieren wir $(h, k).x = hxk^{-1}$.
   (a) Zeigen Sie, dass dies eine Operation von $H \times K$ auf der Menge HK definiert. Ist diese Operation transitiv?
   (b) Bestimmen Sie die Ordnung des Stabilisators $\mathrm{Stab}_{H\times K}(1_G)$, und folgern Sie hieraus eine Formel für die Mächtigkeit $|HK|$.

3. Die Rotationsgruppe eines bestimmten geometrischen Objektes im Raum besteht aus allen Drehungen dieses Objektes, durch die dieses Objekt in sich selbst überführt wird. Zwei Färbungen des regulären Tetraeders $\mathbb{T}$ seien verschieden, wenn Sie nicht durch Rotationssymmetrie des Tetraeders ineinander überführt werden können.
   (a) Wieviele verschiedene Färbungen der Ecken von $\mathbb{T}$ mit n Farben gibt es?
   (b) Wieviele verschiedene Färbungen der Kanten von $\mathbb{T}$ mit n Farben gibt es?

   Bestimmen Sie auch den Isomorphietyp der Rotationsgruppe von $\mathbb{T}$.

4. (Optional.) Es gibt kleine Würfel in den Farben schwarz und weiss. Ein großer Würfel sei aus 27 kleinen Würfeln zusammengesetzt. Wieviele verschieden-gemusterte große Würfel gibt es modulo der Drehgruppe des großen Würfels? Beachten Sie hierbei, dass die Farbe des mittleren kleinen Würfels nicht sichtbar ist, und damit auch keine Rolle spielt.

5. (Schriftlich, 8 Punkte) Begründen Sie im folgenden jeweils Ihre Antwort:
   (a) Sei p eine Primzahl und k eine natürliche Zahl. Wieviele verschiedene abelsche Gruppen der Ordnung p^k gibt es? Wieviele verschiedene abelsche Gruppen der Ordnung 2430000 gibt es? Bestimmen Sie die Elementarteiler der abelschen Gruppen $\mathbb{Z}_{300} \times \mathbb{Z}_{108} \times Z_{16}$ und $(\mathbb{Z}_{2016})^\times$.
   (b) Bestimmen Sie bis auf Isomorphie alle abelschen Gruppen der Ordnung 108, die nicht durch zwei Elemente erzeugt werden können, und die mindestens ein Element der Ordnung ≥ 9 besitzen.
   (c) Sei G eine Gruppe der Ordnung 12 mit einem Normalteiler P der Ordnung 4 und einer Untergruppe U der Ordnung 3. Ist G immer abelsch? Ist $G = P \cdot U$? Angenommen G ist abelsch, sind dann die Elementarteiler von G eindeutig bestimmt?

6. (a) Sei G eine Gruppe mit Untergruppen H und K. Zeigen Sie, dass die folgenden Bedingungen äquivalent sind:
      i. $G = HK$ und $H \cap K = \{1\}$ und $hk = kh$ für alle $h \in H$ und $k \in K$;
      ii. $G = HK$ und $H \cap K = \{1\}$ und H und K sind normal in G;
      iii. Die Abbildung $f : H \times K \to G$ mit $f((h, k)) = hk$ ist ein Isomorphismus.
   (b) Entscheiden Sie jeweils, ob die gegebene Gruppe ein direktes Produkt zweier echter Untergruppen ist (wenn ja, welcher?), und begründen Sie jeweils Ihre Antwort:
      i. $G_1 = \langle x, y, z \mid x^4 = y^2 = z^2 = 1, y^{-1}xy = x^{-1}, xz = zx, yz = zy\rangle$;
      ii. $G_2 = \langle x, y \mid x^6 = 1, x^3 = y^2, yx = x^{-1}y\rangle$;
      iii. $G_3 = \langle x, y, z \mid x^4 = z^2 = 1, x^2 = y^2, y^{-1}xy = x^{-1}, xz = zx, yz = zy\rangle$.

7. Seien H und N Gruppen. Sei $\varphi : H \to \mathrm{Aut}(N)$ ein Homomorphismus mit $h \mapsto \varphi_h$. Wir bezeichnen mit $G := N \rtimes_\varphi H$ das äussere semidirekte Produkt von N mit H vermöge φ. Zeigen Sie:

   (a) in G gilt das Assoziativgesetz;

   (b) die Menge $N' := N \times 1_H$ ist eine normale Untergruppe in G;

   (c) die Menge $H' := \{1_N\} \times H$ ist eine Untergruppe von G, die normal in G ist, genau dann, wenn φ trivial ist;

   (d) Gruppe G ist inneres semidirektes Produkt von N' mit H';

   Bestimmen Sie auch die hinreichenden und notwendigen Bedingungen an den Homomorphismus φ, unter denen G eine abelsche Gruppe ist.

Abgabe der schriftlichen Aufgabe erfolgt in der Vorlesung am Dienstag 30.April 2019, bis 11:30. Die Aufgaben dieses Blattes werden in den Übungen am 7.Mai und 8.Mai besprochen.