11. Übungsblatt zur Algebra II
Mikhail Gorskii, Anne Henke, SS 2019

1. Beweisen Sie, dass man Auflösbarkeit einer Gruppe an ihrer Charaktertafel ablesen kann.

2. Die symmetrische Gruppe S_4 wird erzeugt von $\sigma = (1,2)$ und $\pi = (1,2,3,4)$.

   (a) Vervollständigen Sie die Charaktertafel von S_4 aus der Vorlesung, siehe Beispiel 11.5.

   (b) Eine Darstellung $\mathfrak{X} : S_4 \to \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ sei gegeben durch die darstellenden Matrizen

   $$\mathfrak{X}(1,2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathfrak{X}(1,2,3,4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

   Zeigen Sie, dass die Darstellung $\mathfrak{X}$ irreduzibel ist.

   (c) Eine Darstellung $\mathfrak{Z} : S_4 \to \mathrm{GL}_5(\mathbb{C})$ sei gegeben durch die darstellenden Matrizen

   $$\mathfrak{Z}(1,2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathfrak{Z}(1,2,3,4) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

   Bestimmen Sie bis auf Isomorphie und Reihenfolge eine Zerlegung von $\mathfrak{Z}$ als direkte Summe irreduzibler Darstellungen.

3. Sei G Gruppe der Ordnung 16 mit der Präsentation: $\langle x, y \mid x^8 = y^2 = 1, yxy^{-1} = x^3 \rangle$.

   (a) Bestimmen Sie die Konjugationsklassen von G. Zeigen Sie $Z(G) = \{1, x^4\}$.

   (b) Bestimmen Sie alle linearen Charaktere von G. Welche Grade haben die anderen irreduziblen Charaktere von G?

   (c) Benutzen Sie die Charaktertafel von $G/Z(G)$, um einen nicht-linearen Charakter von G zu bestimmen. Vervollständigen Sie die Charaktertafel von G.

   (d) Bestimmen Sie mit Hilfe der Charaktertafel alle Normalteiler von G, und zeichnen Sie den Verband aller Normalteiler von G. Bestimmen Sie auch die Kommutatorgruppe G'.

4. Sei G eine endliche Gruppe und sei M eine G-Menge mit mindestens zwei Elementen. Sei ρ_M die zugehörige Permutationsdarstellung mit Charakter χ_M. Sei χ_1 der triviale irreduzible Charakter von G.

   (a) Für $g \in G$, zeigen Sie $\chi_M(g)$ ist gleich der Anzahl der Fixpunkte von M unter g. Zeigen Sie, dass für die Anzahl der Bahnen von G auf M gilt: $|M/G| = \langle \chi_M, \chi_1 \rangle$.

   (b) Es sei $g(m_1, m_2) := (gm_1, gm_2)$ für alle $m_1, m_2 \in M$ und $g \in G$. Zeigen Sie, dass hierdurch eine Gruppenwirkung auf $M \times M$ definiert wird. Sei $\chi_{M\times M}$ der Charakter des Permutationsmoduls zur G-Menge $M \times M$. Berechnen Sie den Charakter $\chi_{M\times M}$ in Abhängigkeit von χ_M.

   (c) Die Gruppe G operiere von nun an *zweifach-transitiv* auf M, das heisst, zu allen $x, x', y, y' \in M$ mit $x \neq x'$ und $y \neq y'$ existiert ein $g \in G$ mit $g(x, y) = (x', y')$. Zeigen Sie, dann operiert G auf M transitiv. Indem Sie die Bahnen der G-Menge $M \times M$ beschreiben, bestimmen Sie $|(M \times M)/G|$.

   (d) Zeigen Sie $\sum_{g\in G} \chi_M(g)^2 = 2 \cdot |G|$, und folgern Sie, $\chi_M = \chi_1 + \psi$ für ein $\psi \in \mathrm{Irr}(G)$.

5. (Optional.) Betrachten Sie die Abbildung $\rho : \mathbb{Z} \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, gegeben durch

$$a \mapsto \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Zeigen Sie, dass ρ eine Darstellung der Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$ definiert. Bestimmen Sie den Charakter von ρ.

   (b) Ist die Darstellung ρ irreduzibel?

   (c) Ist ρ zerlegbar als direkte Summe zweier echter Teildarstellungen?

   Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

6. (Schriftlich, 7 Punkte.) Sei G eine endliche Gruppe mit der folgenden partiellen Charaktertafel, in der einige Zeilen fehlen:

	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5
χ_1	1	1	1	ζ	$\bar{\zeta}$
χ_2	3	γ	$\bar{\gamma}$	0	0

   mit $\zeta = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3}i)$ und $\gamma = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{7}i)$.

   (a) Vervollständigen Sie die Charaktertafel von G.

   (b) Beschreiben Sie G durch Erzeuger und Relationen. Ist G eindeutig bestimmt?

   Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

7. (Optional, Schriftlich 12 Punkte.) Sei $Q_{12} = \left\langle x, y \mid x^3 = y^4 = 1, yxy^{-1} = x^2 \right\rangle \simeq C_3 \rtimes C_4$ Gruppe mit zwölf Elementen.

   (a) Bestimmen Sie die Konjugationsklassen von Q_{12}. Wieviele Elemente haben jeweils die Konjugationsklassen von G?

   (b) Bestimmen Sie alle linearen Charaktere von Q_{12}.

   (c) Welche Grade haben die irreduziblen Charaktere von G? Bestimmen Sie mit Hilfe der 2.Orthogonalitätsrelationen die Charaktertafel von G.

   (d) Bestimmen Sie mit Hilfe der Charaktertafel alle Normalteiler von G, und zeichnen Sie den Verband aller Normalteiler von G, in Analogie zum Untergruppenverband. Geben Sie die erste Kommutatorgruppe G', sowie das Zentrum $Z(G)$ an.

   (e) Geben Sie zwei verschiedene Kompositionsreihen von G an – nennen Sie hierbei die Untergruppen von Q_{12} und ihre Isomorphietypen.

8. (Optional.) Zeigen Sie, dass die folgende Tafel, die ersten und zweiten Orthogonalitätsrelationen erfüllt:

	g_1	g_2	g_3	g_4
χ_1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	1	1
χ_3	2	0	-1	2
χ_4	6	0	0	-1

   Welche endlichen Gruppen haben diese Tafel als Charaktertafel?