10. Übungsblatt zur Algebra II

Mikhail Gorskii, Anne Henke, SS 2019

1. Sei K ein Körper. Sei V ein K-Vektorraum mit einer Gruppenwirkung $G \times V \to V$, die linear ist, also mit $g \cdot (v + \lambda w) = g \cdot v + \lambda(g \cdot w)$ für alle $v, w \in V$ und $\lambda \in K$. Zeigen Sie, dass die Abbildung $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$, definiert durch $\rho(g)(v) = g \cdot v$, wohldefiniert und Darstellung ist.

2. Seien R und R' äquivalente Matrixdarstellungen von G vom Grad n. Zeigen Sie, dann existieren Basen B und B' von $V = K^n$ und eine Darstellung $r : G \to GL(V)$ mit $R = \epsilon_B \circ r$ und $R' = \epsilon_{B'} \circ r$. Hierbei ist für eine Basis B die Abbildung $\epsilon_B : \mathrm{GL}(V) \to \mathrm{GL}_n(K)$ gegeben durch die darstellende Matrix von T bezüglich B, also durch $\epsilon_B(T) = M_B(T)$.

3. Sei $D_{2n} = \langle r, s \mid r^n = 1 = s^2, srs = r^{-1} \rangle$ die Diedergruppe der Ordnung $2n$, also die Symmetriegruppe des regulären n-Ecks. Konstruieren Sie eine zwei-dimensionale Darstellung $\rho_{\mathbb{R}} : D_{2n} \to GL_2(\mathbb{R})$ und eine zwei-dimensionale Darstellung $\rho_{\mathbb{C}} : D_{2n} \to GL_2(\mathbb{C})$. Sind die Darstellungen irreduzibel? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

4. (Schriftlich, 12 Punkte.) Die Charaktertafel einer endlichen Gruppe G ist eine quadratische Matrix $X = (\chi(g))_{\chi, \mathcal{C}_g}$. Ihre Spalten sind indiziert durch die Konjugationsklassen $\mathcal{C}_g$ von $g \in G$, und ihre Zeilen sind indiziert durch die irreduziblen Charaktere $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$. Der Eintrag in Zeile χ und Spalte $\mathcal{C}_g$ ist der Charakterwert $\chi(g)$.

   Bestimmen Sie die Charaktertafeln von V_4, S_3, Q_8 und A_4. Welche Methoden benutzen Sie hierbei jeweils zur Berechnung der irreduziblen Charaktere? Welche Charaktere erhalten Sie mittels Inflation, siehe 9.13? Vergleichen Sie auch die Charaktertafel von Q_8 mit der Charaktertafel von D_8.

5. Sei G eine endliche Gruppe und sei $\mathrm{Irr}(G)$ die Menge aller irreduziblen Charaktere von G. Seien $\chi, \lambda \in \mathrm{Irr}(G)$ mit λ linear, also mit $\lambda(1) = 1$, und mit χ Charakter der Darstellung $\rho : G \to \mathrm{GL}_n(K)$. Zeigen Sie, dass durch $\psi : G \to \mathrm{GL}_n(K)$ mit $\psi(g) = \lambda(g)\rho(g)$ eine Darstellung von G definiert wird. Ist ψ eine irreduzible Darstellung? Begründen Sie Ihre Antwort durch einen Beweis oder ein Gegenbeispiel.

6. Sei $\rho : G \to GL_n(K)$ Darstellung von G mit Charakter χ. Wir definieren die Abbildung $\rho^* : G \to GL_n(K)$ durch $\rho^*(g) = \rho(g^{-1})^{tr}$, für $g \in G$. Zeigen Sie ρ^* ist eine Darstellung von G und bestimmen Sie den Charakter von ρ^*. Zeigen Sie ρ ist irreduzibel, genau dann, wenn ρ^* irreduzibel ist.

Insgesamt gibt es 11 Übungsblätter. Bitte gehen Sie Ihre Übungsaufgaben nochmals durch: welche Aufgaben oder Aufgabenteile haben Sie noch nicht verstanden? Bei kleinen Verständnisfragen, nutzen Sie bitte die Sprechstunde von Herrn Gorskii. In den anderen Fällen nennen Sie uns bitte jeweils Blatt/Nummer. Zum Semesterende können dann die Lösungen ausgewählter Aufgaben in einer Vortragsübung vorgerechnet werden.