1. Übungsblatt zur Algebra II
Anne Henke, SS 2019

Die Aufgaben auf diesem Blatt dienen der Wiederholung von Konzepten aus der Algebra Vorlesung. Nutzen Sie Ihre Vorlesungsmitschrift zur Algebra (I) um die folgenden Konzepte zu wiederholen: Gruppen, Untergruppen, Satz von Lagrange, Erzeugendensysteme, normale Untergruppen, Quotientengruppen, Gruppenhomomorphismen, Isomorphiesätze, zyklische Gruppen, symmetrische Gruppen, Diedergruppen, direkte Produkte von Gruppen. Eine alternative Quelle ist Kapitel 1-5 meiner Algebravorlesung SS2017, siehe
http://info.mathematik.uni-stuttgart.de/algebrahenke18/Uebungsblaetter/Algebra-Skript.pdf

1. Zeigen Sie, dass die Diedergruppe D_8 mit acht Elementen und die Quaternionengruppe Q_8 nicht isomorph zueinander sind. Hierbei ist D_8 definiert als die Symmetriegruppe des Quadrates und $Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ mit $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$.

2. Wieviele Elemente haben die folgenden beiden Gruppen G und H:

$$\begin{aligned} G &= \langle x, y \mid x^2 = 1 = y^3, xy = yx \rangle, \\ H &= \langle a, b, c \mid a^2 = b^2 = c^2 = aba^{-1}b^{-1} = aca^{-1}c^{-1} = bcb^{-1}c^{-1} = 1 \rangle. \end{aligned}$$

   Bestimmen Sie den Isomorphietyp der beiden Gruppen G und H:

3. (a) Beschreiben Sie (ohne Beweis) alle Untergruppen der zyklischen Gruppe C_n.
   (b) Bestimmen Sie den Untergruppenverband von C_8, $C_4 \times C_2$ und $C_2 \times C_2 \times C_2$.
   (c) Seien G_1 und G_2 Gruppen, und sei U eine Untergruppe von $G := G_1 \times G_2$. Gilt $U = U_1 \times U_2$ für Untergruppen U_i von G_i, für $i = 1, 2$? Begründen Sie Ihre Antwort.

4. Ist G eine Gruppe, so ist eine *Normalreihe von G der Länge t* definiert als eine Folge von Untergruppen N_i mit $i = 0, 1, \ldots, t$ mit $\{1\} =: N_0 \lhd N_1 \lhd \ldots \lhd N_t := G$. Hierbei bedeutet $N_i \lhd N_{i+1}$, dass N_i eine normale Untergruppe der Gruppe N_{i+1} ist mit $N_i \neq N_{i+1}$.

   Bestimmen Sie für die drei Gruppen C_8, $C_4 \times C_2$ und $C_2 \times C_2 \times C_2$ jeweils die Anzahl der verschiedenen Normalreihen der Länge drei. Bestimmen Sie jeweils für jede dieser Normalreihen den Isomorphietyp der Subquotienten N_i/N_{i-1}, für $i = 1, 2, 3$.

5. Seien G und H Gruppen und $\phi\colon G \to H$ ein Homomorphismus.
   (a) Sei $U \leq H$ eine Untergruppe. Zeigen Sie, dass $\phi^{-1}(U)$ eine Untergruppe von G ist, die normal in G ist, wenn U normal in H ist.
   (b) Seien jetzt $|G| = 84$, $H = C_6$ und $\phi\colon G \to H$ ein Epimorphismus. Zeigen Sie, dass G mindestens vier verschiedene Normalteiler besitzt. Welche Ordnungen haben diese?

6. Ein (Gruppen)epimorphismus ist ein surjektiver (Gruppen)homomorphismus. Gibt es einen Epimorphismus $\varphi : A_5 \to C_4$? Begründen Sie Ihre Antwort.