Injektiv, surjektiv, bijektiv

Aufgabe 2

Bestimme jeweils $\mathrm{Bild}(f)$ für die folgenden Funktionen und untersuche, ob die angegebene Funktion injektiv, surjektiv oder bijektiv ist. Betrachte dazu die Graphen der Funktionen, die für Aufgabe 1 gezeichnet wurden.

a) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 1 & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$

b) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} x & \text{für } x < 0 \\ \frac{1}{2}x - 2 & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$

c) $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} x & \text{für } x < 0 \\ \frac{1}{2}x & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$

d) $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} x & \text{für } x < 0 \\ \frac{1}{2}x + 2 & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$

e) $f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto (x-2)^2 - 3.$

f) $f_5 : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : n \mapsto 3n + 1.$

Aufgabe 3

Bestimme für die folgenden Funktionen jeweils rechnerisch die Umkehrfunktion und begründe damit, dass die Funktionen bijektiv sind:

a) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{3}x + 4,$

b) $f_2 : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R} \setminus \{1\} : x \mapsto \dfrac{x+3}{x-2},$

Zusatzaufgaben:

c) $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} x & \text{für } x < 0 \\ \frac{1}{2}x & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$

d) $f_4 : (0, \infty) \to \mathbb{R} : x \mapsto x - \frac{1}{x},$

e) $f_5 : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ ist folgendermaßen definiert:
Die Bilder der ungeraden Zahlen sind durch $f(2k-1) := k-1$ gegeben, die Bilder der geraden Zahlen durch $f(2k) := -k$.