



## Aufgabe 11

Gegeben ist die alternierende Gruppe  $(\mathcal{A}_4, \circ)$  mit

$$\mathcal{A}_4 = \{e, d_{1,2}, d_{1,3}, d_{1,4}, d_1, d_1^2, d_2, d_2^2, d_3, d_3^2, d_4, d_4^2\}$$

und der Verknüpfungstabelle

$\circ$	$e$	$d_{1,2}$	$d_{1,3}$	$d_{1,4}$	$d_1$	$d_1^2$	$d_2$	$d_2^2$	$d_3$	$d_3^2$	$d_4$	$d_4^2$
$e$	$e$	$d_{1,2}$	$d_{1,3}$	$d_{1,4}$	$d_1$	$d_1^2$	$d_2$	$d_2^2$	$d_3$	$d_3^2$	$d_4$	$d_4^2$
$d_{1,2}$	$d_{1,2}$	$e$	$d_{1,4}$	$d_{1,3}$	$d_4$	$d_3^2$	$d_3$	$d_4^2$	$d_2$	$d_1^2$	$d_1$	$d_2^2$
$d_{1,3}$	$d_{1,3}$	$d_{1,4}$	$e$	$d_{1,2}$	$d_2$	$d_4^2$	$d_1$	$d_3^2$	$d_4$	$d_2^2$	$d_3$	$d_1^2$
$d_{1,4}$	$d_{1,4}$	$d_{1,3}$	$d_{1,2}$	$e$	$d_3$	$d_2^2$	$d_4$	$d_1^2$	$d_1$	$d_4^2$	$d_2$	$d_3^2$
$d_1$	$d_1$	$d_3$	$d_4$	$d_2$	$d_1^2$	$e$	$d_3^2$	$d_{1,3}$	$d_4^2$	$d_{1,4}$	$d_2^2$	$d_{1,2}$
$d_1^2$	$d_1^2$	$d_4^2$	$d_2^2$	$d_3^2$	$e$	$d_1$	$d_{1,4}$	$d_4$	$d_{1,2}$	$d_2$	$d_{1,3}$	$d_3$
$d_2$	$d_2$	$d_4$	$d_3$	$d_1$	$d_4^2$	$d_{1,3}$	$d_2^2$	$e$	$d_1^2$	$d_{1,2}$	$d_3^2$	$d_{1,4}$
$d_2^2$	$d_2^2$	$d_3^2$	$d_1^2$	$d_4^2$	$d_{1,4}$	$d_3$	$e$	$d_2$	$d_{1,3}$	$d_4$	$d_{1,2}$	$d_1$
$d_3$	$d_3$	$d_1$	$d_2$	$d_4$	$d_2^2$	$d_{1,4}$	$d_4^2$	$d_{1,2}$	$d_3^2$	$e$	$d_1^2$	$d_{1,3}$
$d_3^2$	$d_3^2$	$d_2^2$	$d_4^2$	$d_1^2$	$d_{1,2}$	$d_4$	$d_{1,3}$	$d_1$	$e$	$d_3$	$d_{1,4}$	$d_2$
$d_4$	$d_4$	$d_2$	$d_1$	$d_3$	$d_3^2$	$d_{1,2}$	$d_1^2$	$d_{1,4}$	$d_2^2$	$d_{1,3}$	$d_4^2$	$e$
$d_4^2$	$d_4^2$	$d_1^2$	$d_3^2$	$d_2^2$	$d_{1,3}$	$d_2$	$d_{1,2}$	$d_3$	$d_{1,4}$	$d_1$	$e$	$d_4$

a) Gib die Ordnung an:  $|\mathcal{A}_4| =$

b) Die folgenden Teilmengen  $U$  bilden **keine** Untergruppe. Überprüfe jeweils, ob bereits mit dem Satz von Lagrange begründet werden kann, dass  $U$  keine Untergruppe bildet. Trage in diesem Fall „Lagrange“ als Begründung ein. Falls dies nicht der Fall ist, trage ein, welches der Untergruppenkriterien verletzt ist.

	Begründung, dass keine Untergruppe vorliegt
$U = \{e, d_1, d_1^2, d_2, d_2^2, d_3, d_3^2, d_4, d_4^2\}$	
$U = \{d_{1,2}, d_{1,3}, d_{1,4}\}$	
$U = \{e, d_{1,2}, d_1\}$	
$U = \{e, d_{1,2}, d_{1,3}, d_{1,4}, d_1\}$	

c) Nach dem Satz von Lagrange kann eine Teilmenge  $U \subseteq \mathcal{A}_4$  mit  $|U| = 2$  eine Untergruppe sein. Finde alle drei Untergruppen mit Ordnung 2.

$$U_1 = \{ \quad \}, \quad U_2 = \{ \quad \}, \quad U_3 = \{ \quad \}.$$

Weiter auf Seite 3

**Aufgabe 12**

Gegeben ist die Gruppe  $(\mathcal{D}_6, \circ)$  und die Teilmenge  $M = \{D_{240}, S_4, S_6\}$ . Gesucht ist die von  $M$  erzeugte Untergruppe.

a) Gib  $M_N$  an:  $M_N = \{ \quad \quad \quad \}$

b) Gib  $M_{NI}$  an:  $M_{NI} = \{ \quad \quad \quad \}$

c) Gib  $M_{NIA}$  an:  $M_{NIA} = \{ \quad \quad \quad \}$

d) Gib die Gruppenordnung von  $\mathcal{D}_6$  und  $M_{NIA}$  an:  $|\mathcal{D}_6| = \quad \quad \quad$ ,  $|M_{NIA}| = \quad \quad \quad$ .

e) Was besagt die Aussage des Satzes von Lagrange für die Gruppe  $(\mathcal{D}_6, +)$  und die Untergruppe  $M_{NIA}$ ?

Antwort:

**Verknüpfungstabelle für  $\mathcal{D}_6$ :**

$\circ$	$D_0$	$D_{60}$	$D_{120}$	$D_{180}$	$D_{240}$	$D_{300}$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$S_5$	$S_6$
$D_0$	$D_0$	$D_{60}$	$D_{120}$	$D_{180}$	$D_{240}$	$D_{300}$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$S_5$	$S_6$
$D_{60}$	$D_{60}$	$D_{120}$	$D_{180}$	$D_{240}$	$D_{300}$	$D_0$	$S_5$	$S_4$	$S_6$	$S_1$	$S_3$	$S_2$
$D_{120}$	$D_{120}$	$D_{180}$	$D_{240}$	$D_{300}$	$D_0$	$D_{60}$	$S_3$	$S_1$	$S_2$	$S_5$	$S_6$	$S_4$
$D_{180}$	$D_{180}$	$D_{240}$	$D_{300}$	$D_0$	$D_{60}$	$D_{120}$	$S_6$	$S_5$	$S_4$	$S_3$	$S_2$	$S_1$
$D_{240}$	$D_{240}$	$D_{300}$	$D_0$	$D_{60}$	$D_{120}$	$D_{180}$	$S_2$	$S_3$	$S_1$	$S_6$	$S_4$	$S_5$
$D_{300}$	$D_{300}$	$D_0$	$D_{60}$	$D_{120}$	$D_{180}$	$D_{240}$	$S_4$	$S_6$	$S_5$	$S_2$	$S_1$	$S_3$
$S_1$	$S_1$	$S_4$	$S_2$	$S_6$	$S_3$	$S_5$	$D_0$	$D_{120}$	$D_{240}$	$D_{60}$	$D_{300}$	$D_{180}$
$S_2$	$S_2$	$S_6$	$S_3$	$S_5$	$S_1$	$S_4$	$D_{240}$	$D_0$	$D_{120}$	$D_{300}$	$D_{180}$	$D_{60}$
$S_3$	$S_3$	$S_5$	$S_1$	$S_4$	$S_2$	$S_6$	$D_{120}$	$D_{240}$	$D_0$	$D_{180}$	$D_{60}$	$D_{300}$
$S_4$	$S_4$	$S_2$	$S_6$	$S_3$	$S_5$	$S_1$	$D_{300}$	$D_{60}$	$D_{180}$	$D_0$	$D_{240}$	$D_{120}$
$S_5$	$S_5$	$S_1$	$S_4$	$S_2$	$S_6$	$S_3$	$D_{60}$	$D_{180}$	$D_{300}$	$D_{120}$	$D_0$	$D_{240}$
$S_6$	$S_6$	$S_3$	$S_5$	$S_1$	$S_4$	$S_2$	$D_{180}$	$D_{300}$	$D_{60}$	$D_{240}$	$D_{120}$	$D_0$