Existenz von Untergruppen

Sascha behauptet: Mit dem Satz von Lagrange kann ich doch auch folgendes sagen: „Wenn G eine endliche Gruppe und k ein Teiler von $|G|$ ist, dann gibt es eine Untergruppe U mit $|U| = k$.“

Die folgenden Aufgaben helfen Dir, herauszufinden, ob diese Aussage richtig ist.

Aufgabe 7

a) Gib die Ordnung der Symmetriegruppe des Sechsecks $\mathcal{D}_6$ und ihre nichttrivialen Teiler an.

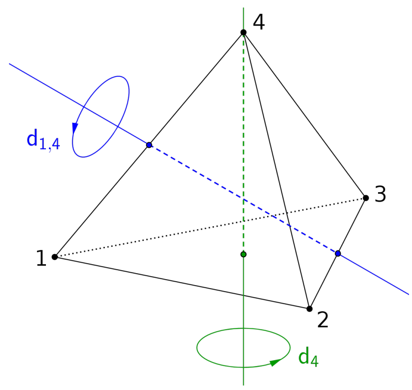
b) Untersuche, ob es zu jedem nichttrivialen Teiler k von $|\mathcal{D}_6|$ eine Untergruppe von $\mathcal{D}_6$ mit der Ordnung k gibt.

Hinweis: Du kannst die Ergebnisse von Aufgabe 4 verwenden.

Aufgabe 8

Die Tetraedergruppe oder alternierende Gruppe $\mathcal{A}_4$ enthält alle Drehsymmetrien des Tetraeders. Für die enthaltenen Abbildungen gelten folgende Bezeichnungen:

- e: Das neutrale Element (Drehung um 0°),
- $d_{1,4}$: Die $180°$-Drehung um die Gerade durch die Mittelpunkte der Seiten $\overline{14}$ und $\overline{23}$,
- d_4: Die $120°$-Drehung um die Höhe durch den Eckpunkt 4,
- d_4^2: Die $240°$-Drehung um die Höhe durch den Eckpunkt 4 (also $d_4 \circ d_4$).



a) Die 12 Elemente von $\mathcal{A}_4$ sind (trage die fehlenden Zahlen ein):

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad d_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad d_1^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix},$$

$$d_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad d_2^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}, \quad d_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$d_3^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad d_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}, \quad d_4^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix},$$

$$d_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad d_{1,3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad d_{1,4} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix}.$$

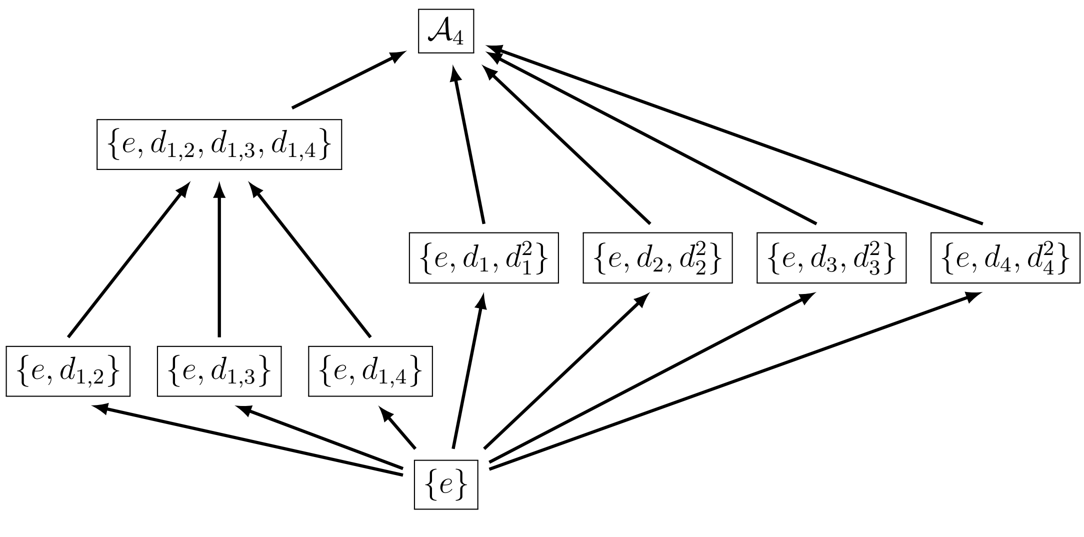
b) Vervollständige die Verknüpfungstabelle von $\mathcal{A}_4$:

$\circ$	e	$d_{1,2}$	$d_{1,3}$	$d_{1,4}$	d_1	d_1^2	d_2	d_2^2	d_3	d_3^2	d_4	d_4^2
e	e	$d_{1,2}$	$d_{1,3}$	$d_{1,4}$	d_1	d_1^2	d_2	d_2^2	d_3	d_3^2	d_4	d_4^2
$d_{1,2}$	$d_{1,2}$	e	$d_{1,4}$	$d_{1,3}$	d_4	d_3^2	d_3	d_4^2	d_2	d_1^2	d_1	d_2^2
$d_{1,3}$	$d_{1,3}$	$d_{1,4}$	e	$d_{1,2}$	d_2	d_4^2	d_1	d_3^2	d_4	d_2^2	d_3	d_1^2
$d_{1,4}$	$d_{1,4}$	$d_{1,3}$	$d_{1,2}$	e	d_3	d_2^2	d_4	d_1^2	d_1	d_4^2	d_2	d_3^2
d_1	d_1	d_3	d_4	d_2			d_3^2	$d_{1,3}$	d_4^2			$d_{1,2}$
d_1^2	d_1^2	d_4^2	d_2^2	d_3^2	e	d_1	$d_{1,4}$	d_4	$d_{1,2}$	d_2	$d_{1,3}$	d_3
d_2	d_2	d_4	d_3	d_1	d_4^2		d_2^2	e	d_1^2	$d_{1,2}$	d_3^2	$d_{1,4}$
d_2^2	d_2^2	d_3^2	d_1^2	d_4^2	$d_{1,4}$		e	d_2	$d_{1,3}$	d_4	$d_{1,2}$	d_1
d_3	d_3	d_1	d_2	d_4	d_2^2	$d_{1,4}$	d_4^2	$d_{1,2}$	d_3^2	e	d_1^2	$d_{1,3}$
d_3^2	d_3^2	d_2^2	d_4^2	d_1^2	$d_{1,2}$	d_4	$d_{1,3}$	d_1	e		$d_{1,4}$	d_2
d_4	d_4	d_2	d_1	d_3	d_3^2	$d_{1,2}$	d_1^2	$d_{1,4}$	d_2^2	$d_{1,3}$	d_4^2	e
d_4^2	d_4^2	d_1^2	d_3^2	d_2^2	$d_{1,3}$	d_2	$d_{1,2}$	d_3	$d_{1,4}$	d_1		d_4

Aufgabe 9

a) Welche Ordnung hat $\mathcal{A}_4$? $|\mathcal{A}_4| =$ _____.

b) Das folgende Diagramm zeigt systematisch alle Untergruppen von $\mathcal{A}_4$. Dabei bedeutet jeder Pfeil „ist Untergruppe von". Erkläre anhand des Diagramms, warum die Aussage von Sascha falsch ist.



Begründung: