

Untergruppen

Aufgabe 2

- a) Welche Ordnung haben die Symmetriegruppe \mathcal{D}_6 des Sechsecks und die Gruppe $\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}$?

$$|\mathcal{D}_6| = \underline{\hspace{2cm}}, \quad |\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}| = \underline{\hspace{2cm}}.$$

- b) Bilden die angegebenen Mengen Untergruppen der Symmetriegruppe des Sechsecks? Begründe Deine Antworten!

b1) $U_1 := \{D_0, D_{180}\},$

b2) $U_2 := \{D_0, D_{120}, D_{240}, S_3, S_5\},$

b3) $U_3 := \{D_0, D_{60}, D_{180}\}.$

- c) Bilden die angegebenen Mengen Untergruppen der Gruppe $\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}$? Begründe Deine Antworten!

c1) $U_4 := \{[0], [8]\},$

c2) $U_5 = \{[0], [7], [14]\},$

c3) $U_6 = \{[0], [3], [6], [9], [12], [15]\}.$

Hinweis: Der Satz von Lagrange kann teilweise eine schnelle Antwort liefern.

Aufgabe 3

Gibt es Gruppen, die sicher keine nichttrivialen Untergruppen haben? Begründe Deine Antwort.

Aufgabe 4

- a) Formuliere den Umkehrsatz zum Satz von Lagrange.
b) Wie könnte man den Umkehrsatz widerlegen?

Verknüpfungstabelle für die Sechsecksymmetrien:

\circ	D_0	D_{60}	D_{120}	D_{180}	D_{240}	D_{300}	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
D_0	D_0	D_{60}	D_{120}	D_{180}	D_{240}	D_{300}	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
D_{60}	D_{60}	D_{120}	D_{180}	D_{240}	D_{300}	D_0	S_5	S_4	S_6	S_1	S_3	S_2
D_{120}	D_{120}	D_{180}	D_{240}	D_{300}	D_0	D_{60}	S_3	S_1	S_2	S_5	S_6	S_4
D_{180}	D_{180}	D_{240}	D_{300}	D_0	D_{60}	D_{120}	S_6	S_5	S_4	S_3	S_2	S_1
D_{240}	D_{240}	D_{300}	D_0	D_{60}	D_{120}	D_{180}	S_2	S_3	S_1	S_6	S_4	S_5
D_{300}	D_{300}	D_0	D_{60}	D_{120}	D_{180}	D_{240}	S_4	S_6	S_5	S_2	S_1	S_3
S_1	S_1	S_4	S_2	S_6	S_3	S_5	D_0	D_{120}	D_{240}	D_{60}	D_{300}	D_{180}
S_2	S_2	S_6	S_3	S_5	S_1	S_4	D_{240}	D_0	D_{120}	D_{300}	D_{180}	D_{60}
S_3	S_3	S_5	S_1	S_4	S_2	S_6	D_{120}	D_{240}	D_0	D_{180}	D_{60}	D_{300}
S_4	S_4	S_2	S_6	S_3	S_5	S_1	D_{300}	D_{60}	D_{180}	D_0	D_{240}	D_{120}
S_5	S_5	S_1	S_4	S_2	S_6	S_3	D_{60}	D_{180}	D_{300}	D_{120}	D_0	D_{240}
S_6	S_6	S_3	S_5	S_1	S_4	S_2	D_{180}	D_{300}	D_{60}	D_{240}	D_{120}	D_0