

Endliche Gruppen

Aufgabe 4

Für $G = \{f, g, h\}$ sei die Verknüpfung \circ durch die rechts stehende Tabelle definiert.

\circ	f	g	h
f	h	f	g
g	f	g	h
h	g	h	f

- a) Stelle fest, welches das neutrale Element ist.
- b) Bestimme zu jedem Element das inverse Element.

Aufgabe 5

Gegeben ist die Menge $G = \{e, a, b, u, v, w\}$ und eine Verknüpfung \circ . Leider sind in der Verknüpfungstabelle ein paar Einträge verloren gegangen.

\circ	e	a	b	u	v	w
e						
a		b	u	v	w	
b			v	w		
u					a	
v					b	
w			a	b	u	v

Bekannt ist, dass e das neutrale Element ist. Ergänze die fehlenden Einträge in der Verknüpfungstabelle, so dass eine kommutative Gruppe entsteht. Achtung: Die Verknüpfung ist anders als in Aufgabe 2.

Hinweise: Benütze als erstes die Eigenschaft, dass e das neutrale Element ist. Fülle dann alle Felder aus, für die das Kommutativgesetz den Eintrag liefert.

Aufgabe 6

Eine zyklische Gruppe $G = \{a, b, c, d\}$ mit 4 Elementen hat folgende Struktur: Es gibt ein Element a , aus dem die anderen Elemente gebildet werden können, indem man a geeignet oft mit sich selber verknüpft.

$$b = a \circ a,$$

$$c = a \circ a \circ a,$$

$$d = a \circ a \circ a \circ a,$$

$a = a \circ a \circ a \circ a \circ a$, und jetzt wiederholen sich die Ergebnisse, z.B.

$$\underbrace{a \circ a \circ a \circ a \circ a \circ a}_{6 \text{ Mal } a \text{ mit sich selber verknüpft}} = a \circ (a \circ a \circ a \circ a \circ a) = a \circ a = b.$$

Dadurch ist die Verknüpfungstabelle eindeutig bestimmt.

a) Berechne das Ergebnis von

$$\underbrace{a \circ \dots \circ a}_{7 \text{ Mal } a \text{ mit sich selber verknüpft}} =$$

$$\underbrace{a \circ \dots \circ a}_{8 \text{ Mal } a \text{ mit sich selber verknüpft}} =$$

$$\underbrace{a \circ \dots \circ a}_{9 \text{ Mal } a \text{ mit sich selber verknüpft}} =$$

$$\underbrace{a \circ \dots \circ a}_{10 \text{ Mal } a \text{ mit sich selber verknüpft}} =$$

$$\underbrace{a \circ \dots \circ a}_{10 \text{ Mal } a \text{ mit sich selber verknüpft}} =$$

$$\underbrace{a \circ \dots \circ a}_{10 \text{ Mal } a \text{ mit sich selber verknüpft}} =$$

10 Mal a mit sich selber verknüpft

b) Fülle die Verknüpfungstabelle aus.

\circ	a	b	c	d
a				
b				
c				
d				

c) Gib das neutrale Element an.