Schriftliche Aufgaben

Aufgabe 1

Sei p prim, $p \neq 2$ und $p \neq 5$. Welche der Aussagen ist wahr oder falsch? Kreuze an!

	wahr	falsch
Die aus 12 Neunen gebildete Zahl 999999999999 ist die kleinste aus Neunen gebildete Zahl, die durch 7 teilbar ist.		
Ist $a \in \mathbb{N}$ ein Vielfaches von p, so gilt $a^k \not\equiv 1 \mod p$ für alle $k \in \mathbb{N}$.		
Ist $p-1$ durch 2 teilbar, dann folgt $\mathrm{ord}_p(10) \leq \frac{p}{2}$.		
$\mathrm{ord}_5(10)$ ist nicht definiert.		
Die Periodenlänge der Dezimaldarstellung von $\frac{1}{p}$ ist ein Teiler von $p-1$.		
Die Periodenlänge der Dezimaldarstellung von $\frac{1}{p}$ ist gleich $\mathrm{ord}_p(10)$.		
Ist $k = \mathrm{ord}_p(10)$ durch 2 teilbar, so ergänzen sich die j-te Periodenziffer der Dezimaldarstellung von $\frac{1}{p}$ und die $\frac{k}{2}+j$-te Periodenziffer zu 9.		
Ist $k = \mathrm{ord}_p(10)$ durch 2 teilbar, so ist $10^{k/2}-1$ durch p teilbar.		

Aufgabe 2

$k =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	
$2^k \equiv$	2	4	8	16	15	13	9	1	2	4	8	16	15	13	9	1	2	mod 17
$3^k \equiv$	3	9	10	13	5	15	11	16	14	8	7	4	12	2	6	1	3	mod 17
$4^k \equiv$	4	16	13	1	4	16	13	1	4	16	13	1	4	16	13	1	4	mod 17
$5^k \equiv$	5	8	6	13	14	2	10	16	12	9	11	4	3	15	7	1	5	mod 17
$6^k \equiv$	6	2	12	4	7	8	14	16	11	15	5	13	10	9	3	1	6	mod 17
$7^k \equiv$	7	15	3	4	11	9	12	16	10	2	14	13	6	8	5	1	7	mod 17
$8^k \equiv$	8	13	2	16	9	4	15	1	8	13	2	16	9	4	15	1	8	mod 17
$9^k \equiv$	9	13	15	16	8	4	2	1	9	13	15	16	8	4	2	1	9	mod 17
$10^k \equiv$	10	15	14	4	6	9	5	16	7	2	3	13	11	8	2	1	10	mod 17
$11^k \equiv$	11	2	5	4	10	8	3	16	6	15	12	13	7	9	14	1	11	mod 17
$12^k \equiv$	12	8	11	13	3	2	7	16	5	9	6	4	14	15	10	1	12	mod 17
$13^k \equiv$	13	16	4	1	13	16	4	1	13	16	4	1	13	16	4	1	13	mod 17
$14^k \equiv$	14	9	7	13	12	15	6	16	3	8	10	4	5	2	11	1	14	mod 17
$15^k \equiv$	15	4	9	16	2	13	8	1	15	4	9	16	2	13	8	1	15	mod 17
$16^k \equiv$	16	1	16	1	16	1	16	1	16	1	16	1	16	1	16	1	16	mod 17

a) Markiere in der Tabelle die Einträge der Zahl 1, die jeweils für die Ordnung $\mathrm{ord}_{17}(a)$ für $a = 2, 3, \ldots, 16$ ausschlaggebend sind.

b) Gib jeweils alle a an, für die $\mathrm{ord}_{17}(a)$ den vorgegebenen Wert besitzt.

$\mathrm{ord}_{17}(a) = 2$ für $a =$ ☐, $\mathrm{ord}_{17}(a) = 8$ für $a =$ ☐,

$\mathrm{ord}_{17}(a) = 4$ für $a =$ ☐, $\mathrm{ord}_{17}(a) = 16$ für $a =$ ☐.

Weiter auf Seite 2

Aufgabe 3

In dieser Aufgabe soll eine Primzahl gefunden werden, so dass die Dezimaldarstellung von $\frac{1}{p}$ eine vorgegebene Periodenlänge k besitzt. Dabei helfen uns zwei Dinge, die wir gelernt haben:

1) Die Periodenlänge k ist ein Teiler von $p - 1$.

2) Es gilt $0{,}\overline{a_1 a_2 \dots a_k} = \dfrac{a_1 a_2 \dots a_k}{\underbrace{99\dots9}_{k \text{ Neunen}}}$.

Dies können wir z.B. benützen, um eine Primzahl p zu finden, so dass die Dezimaldarstellung von $\frac{1}{p}$ die Periodenlänge $k = 3$ besitzt.

Aus 2) folgern wir

$$\frac{1}{p} = \frac{a_1 a_2 a_3}{999}.$$

Also muss p ein Primteiler von 999 sein. Primfaktorzerlegung ergibt $999 = 9 \cdot 111 = 3^3 \cdot 37$. Wegen 1) kommt nur $p = 37$ in Frage, denn $37 - 1 = 36$ ist durch 3 teilbar. Wir können nun

$$\frac{1}{37} = \frac{3^3}{3^3 \cdot 37} = \frac{27}{999} = 0{,}\overline{027} \qquad (*)$$

folgern. Man kann auch umgekehrt vorgehen. Zunächst stellt man eine Liste von Primzahlen p_j auf, für die $p_j - 1$ durch 3 teilbar ist. Das wären z.B. $p_1 = 7$, $p_2 = 13$, $p_3 = 19$, $p_4 = 31$, $p_5 = 37$, $p_6 = 43, \dots$. Im nächsten Schritt muss dann überprüft werden, welche der Primzahlen p_j Teiler von 999 ist. Dies ergibt $999 = 27 \cdot 37$, und nun kann wieder $(*)$ gefolgert werden.

a) Sei $k = 4$.

a₁) Bestimme die Primfaktorzerlegung. $9999 = \boxed{}$,

a₂) Gib eine Primzahl p an, so dass die Dezimaldarstellung von $\frac{1}{p}$ die Periodenlänge $k = 4$ besitzt.

$p = \boxed{}$, $\quad \frac{1}{p} = \boxed{}$

b) Sei $k = 8$.

b₁) Gib die fünf Primzahlen $p_1, \dots, p_5$ zwischen 1 und 100 an, für die $p_j - 1$ durch $k = 8$ teilbar ist.

$p_1 = \boxed{}$, $\quad p_2 = \boxed{}$, $\quad p_3 = \boxed{}$, $\quad p_4 = \boxed{}$, $\quad p_5 = \boxed{}$.

b₂) Welche der fünf Primzahlen teilt $99\,999\,999$? Gib eine Primzahl p an, so dass die Dezimaldarstellung von $\frac{1}{p}$ die Periodenlänge $k = 8$ besitzt.

$p = \boxed{}$, $\quad \frac{1}{p} = \boxed{}$

Hinweis: Du kannst die Primzahltabelle auf der nächsten Seite benützen.

2	3	5	7	[redacted]	11	13	[redacted]	17	19	[redacted]	23	[redacted]	[redacted]	29
31	[redacted]	[redacted]	37	[redacted]	41	43	[redacted]	47	[redacted]	[redacted]	53	[redacted]	[redacted]	59
61	[redacted]	[redacted]	67	[redacted]	71	73	[redacted]	[redacted]	79	[redacted]	83	[redacted]	[redacted]	89
[redacted]	[redacted]	[redacted]	97	[redacted]	101	103	[redacted]	107	109	[redacted]	113	[redacted]	[redacted]	[redacted]
[redacted]	[redacted]	[redacted]	127	[redacted]	131	[redacted]	[redacted]	137	139	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]	149
151	[redacted]	[redacted]	157	[redacted]	[redacted]	163	[redacted]	167	[redacted]	[redacted]	173	[redacted]	[redacted]	179
181	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]	191	193	[redacted]	197	199	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]
211	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]	223	[redacted]	227	229	[redacted]	233	[redacted]	[redacted]	239
241	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]	251	[redacted]	[redacted]	257	[redacted]	[redacted]	263	[redacted]	[redacted]	269
271	[redacted]	[redacted]	277	[redacted]	281	283	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]	293	[redacted]	[redacted]	[redacted]
[redacted]	[redacted]	[redacted]	307	[redacted]	311	313	[redacted]	317	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]
[redacted]	[redacted]	[redacted]	337	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]	347	349	[redacted]	353	[redacted]	[redacted]	359
361	[redacted]	[redacted]	367	[redacted]	[redacted]	373	[redacted]	[redacted]	379	[redacted]	383	[redacted]	[redacted]	389
[redacted]	[redacted]	[redacted]	397	[redacted]	401	[redacted]	[redacted]	[redacted]	409	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]	419
421	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]	431	433	[redacted]	[redacted]	439	[redacted]	443	[redacted]	[redacted]	449
[redacted]	[redacted]	[redacted]	457	[redacted]	461	463	[redacted]	467	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]	479
[redacted]	[redacted]	[redacted]	487	[redacted]	491	[redacted]	[redacted]	[redacted]	499	[redacted]	503	[redacted]	[redacted]	509