Schriftliche Aufgaben

Name:

Aufgabe 6

Wahr oder falsch? Kreuze an!

	wahr	falsch
Es gilt $3146146146 \equiv 0 \mod 9$.		
Es gilt $-35 \equiv -1 \mod 8$.		
Aus $a \equiv b \mod m$ folgt $a^3 \equiv b^3 \mod m$.		
Die Zahl $m = 0$ hat als Teiler jede beliebige natürliche Zahl k.		
Nach dem kleinen Satz von Fermat gilt $5^{19} \equiv 1 \mod 20$.		
Es gilt $4\,256\,256\,256\,256 \equiv 4 \mod 11$		
Die Gleichung $x + 2 \equiv 7 \mod 11$ hat genau eine Lösung $x \in \mathbb{Z}$.		

Aufgabe 7

Sei $m \in \mathbb{N}$ eine fest gewählte Zahl und $a, b, c, d \in \mathbb{N}$. Beweise die folgenden Aussagen, indem Du die Kästchen ausfüllst.

a) Aus $a \equiv b \mod m$ und $c \equiv d \mod m$ folgt $a + c \equiv b + d \mod m$.

Was weiß ich?

Was ist zu beweisen?

Beweis:

b) Aus $a \equiv b \mod m$ und $b \equiv c \mod m$ folgt $a \equiv c \mod m$.

Was weiß ich?

Was ist zu beweisen?

Beweis:

Hinweis: Solltest Du Probleme bei der Lösung der Aufgabe haben, schau Dir nochmal den Beweis zur Rechenregel 1c) im zweiten Satz der heutigen Einheit an.

Weiter auf Seite 2

Aufgabe 8

Bestimme jeweils möglichst alle ganzzahligen Lösungen x der angegebenen Gleichung. Falls die Gleichung keine Lösung besitzt, trage „Keine Lösung“ ein.

a) $11 \equiv x \mod 9$

Lösung: ,

b) $3 \cdot x \equiv 22 \mod 6$,

Lösung: ,

c) $7 \cdot x \equiv 10 \mod 11$.

Lösung: ,

Aufgabe 9

Für eine Zahl $m \in \mathbb{N}$ soll gezeigt werden, dass sie keine Primzahl ist.
Falls m eine Primzahl wäre, müsste nach dem kleinen Satz von Fermat $a^{m-1} \equiv 1 \mod m$ für alle $a = 1, 2, 3, \ldots, m-1$ gelten.
Umgekehrt: Falls wir ein $a \in \{1, 2, 3, \ldots, m-1\}$ finden, für das $a^{m-1} \not\equiv 1 \mod m$ gilt, ist m keine Primzahl. Man sagt, a ist **Zeuge** gegen die Primalität von m.

Beispiel $m = 15$: Gesucht ist eine Zahl $a \in \mathbb{N}$, so dass $a^{14} \not\equiv 1 \mod 15$.
Probiere $a = 2$: $2^{14} = (2^4)^3 \cdot 4 = 16^3 \cdot 4 \overset{16\equiv 1}{\equiv} 1^3 \cdot 4 = 4 \not\equiv 1 \mod 15$
$\Rightarrow 2^{14} \not\equiv 1 \mod 15$, also ist 2 Zeuge gegen die Primalität von 15.

a) Sei $m = 25$. Zeige, dass $a = 3$ Zeuge gegen die Primalität von 25 ist.
Hinweis: Du kannst z.B. $3^3 = 27 \equiv 2 \mod 25$ zur Vereinfachung verwenden.
Lösung:

b) Sei $m = 21$. Zeige, dass $a = 2$ Zeuge gegen die Primalität von 21 ist.
Hinweis: Du kannst z.B. $2^5 = 32 \equiv 11 \mod 21$ zur Vereinfachung verwenden.
Lösung: