Arbeitsblatt 1: Wiederholung

Erinnerung: 1) $k \in \mathbb{N}$ heißt Teiler von $x \in \mathbb{Z}$, falls es ein $x' \in \mathbb{Z}$ gibt, so dass $x = k \cdot x'$.

2) $a \equiv b \mod m$ bedeutet: $a - b$ ist durch m teilbar
Äquivalent dazu: $a = b + km$ für ein geeignetes $k \in \mathbb{Z}$

Aufgabe 1

In dieser Aufgabe geht es darum, wie viel verschiedene Teiler eine gegebene natürliche Zahl hat.

a) Bestimme die Menge aller Teiler von 105.

b) Nun seien p_1, p_2, p_3 drei verschiedene Primzahlen. Bestimme die Menge aller Teiler von $n := p_1, p_2, p_3$. Wie viele Teiler besitzt n?

c) Nun seien p_1, p_2, p_3, p_4 vier verschiedene Primzahlen und $m := p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4$. Wie viele Teiler besitzt m?
Hinweis: Welche Teiler haben n und m gemeinsam, wenn in b) und c) für p_1, p_2, p_3 die selben Primzahlen gewählt werden? Wie kann man aus diesen gemeinsamen Teilern die Teiler von m erhalten, die keine Teiler von n sind?

d) Gib, wenn möglich, eine Vermutung an, wie viele Teiler eine Zahl N hat, die Produkt von k verschiedenen Primzahlen ist.

Aufgabe 2

Untersuche, ob die folgenden Gleichungen eine Lösung $x \in \mathbb{Z}$ besitzen. Gib gebenenfalls eine Lösung $x \in \mathbb{Z}$ an. Kannst Du auch mehrere Lösungen finden?

a) $2 \cdot x \equiv 1 \mod 5$,

b) $77 \cdot x \equiv 1 \mod 5$,

c) $35 \cdot x \equiv 1 \mod 5$,

d) $62 \cdot x \equiv 1 \mod 7$,

e) Knack die Zusatzaufgabe: $106 \cdot x \equiv 1 \mod 107$
Tipp: 106 ist kongruent zu einer negativen Zahl, mit der einfacher zu rechnen ist.

f) Noch schwierigere Zusatzaufgabe: $105 \cdot x \equiv 1 \mod 107$.

Aufgabe 3

Beweise den folgenden Satz.

Seien $a, b, x, y \in \mathbb{Z}$ und $k \in \mathbb{N}$ ein Teiler von a und von b. Dann ist k ein Teiler von $a \cdot x + b \cdot y$.

Beweise den Satz. Schreibe dazu auf:

a) Was weiß ich?

b) Was ist zu zeigen?

c) Beweis des Satzes.