

Schriftliche Aufgaben

Aufgabe 7

- a) Seien $a, b, m \in \mathbb{N}$. Welche der Aussagen ist für die Kongruenzgleichung $a \cdot x \equiv b \pmod{m}$ immer wahr, welche ist (zumindest für geeignete Wahl von a, b, m) falsch? Kreuze an!

	wahr	falsch
Die Kongruenzgleichung hat entweder keine oder unendlich viele Lösungen.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Sind a, m teilerfremd, so besitzt die Kongruenzgleichung mindestens eine Lösung.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Ist b ein Teiler von a und von m , so besitzt die Kongruenzgleichung mindestens eine Lösung.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Besitzt die Kongruenzgleichung Lösungen, dann gibt es genau eine Lösung $x \in \mathbb{Z}$ mit $0 \leq x < m$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

- b) Seien $m_1, m_2, m_3, r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{Z}$, so dass die Voraussetzungen des Chinesischen Restsatzes erfüllt sind. Welche der Aussagen ist für die drei Kongruenzgleichungen

$$\begin{aligned} x &\equiv r_1 \pmod{m_1} \\ x &\equiv r_2 \pmod{m_2} \\ x &\equiv r_3 \pmod{m_3} \end{aligned}$$

immer wahr, welche ist (zumindest für geeignete Wahl von $m_1, m_2, m_3, r_1, r_2, r_3$) falsch? Kreuze an!

	wahr	falsch
Die kleinste nichtnegative Lösung $x \in \mathbb{Z}$ ist die Lösung, die die Eindeigkeitsbedingung aus dem Chinesischen Restsatz erfüllt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Es gibt genau eine Lösung $x \in \mathbb{Z}$ mit $-m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \leq x < 0$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Ist x eine Lösung, dann ist $\tilde{x} = x + m_1$ eine weitere Lösung.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Sind x, \tilde{x} zwei Lösungen, so ist die Differenz $x - \tilde{x}$ durch $m_1 \cdot m_2 \cdot m_3$ teilbar.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Aufgabe 8

Verschlüsselung mit dem chinesischen Restsatz:

Eine dreistellige Geheimzahl x ist durch die Zahl 671 kodiert. Die Kodierung bedeutet, dass x beim Teilen durch 7 den Rest 6, beim Teilen durch 11 den Rest 7 und beim Teilen durch 13 den Rest 1 lässt. Berechne x , indem Du die Kästchen bzw. die Tabelle ausfüllst.

$M = m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 =$

m_i	r_i	$\frac{M}{m_i}$	$\frac{M}{m_i} \equiv a_i \pmod{m_i}$	$a_i \cdot x_i \equiv 1 \pmod{m_i}$	x_i	$r_i \cdot \frac{M}{m_i} \cdot x_i$
7	6	143	$143 \equiv 3 \pmod{7}$	$3 \cdot x_1 \equiv 1 \pmod{7}$	5	4290

Summe:

$\Rightarrow x =$

Aufgabe 9

Der Chinesische Restsatz gilt entsprechend für zwei Kongruenzgleichungen. Der Beweis und die Berechnung der gesuchten Zahl können einfach übernommen werden.

- a) Formuliere den Chinesischen Restsatz für zwei Kongruenzgleichungen $x \equiv r_1 \pmod{m_1}$ und $x \equiv r_2 \pmod{m_2}$.

- b) Eine Schulklasse hat in zwei verschiedenen Klassenzimmern Unterricht. Im ersten Klassenzimmer sind die Tische in 6er Reihen aufgebaut, es bleiben 5 Plätze frei. Im zweiten stehen 7er Reihen, hier bleibt ein Platz frei. Wie viele Schülerinnen und Schüler besuchen die Klasse? Vervollständige die Tabelle und berechne die Lösung.

Tipp: Es sind weniger als 42 Schülerinnen und Schüler in der Klasse.

$$M = \boxed{}$$

m_i	r_i	$\frac{M}{m_i}$	$\frac{M}{m_i} \cdot x_i \equiv 1 \pmod{m_i}$	x_i	$r_i \cdot \frac{M}{m_i} \cdot x_i$
Summe:					

$$\Rightarrow x = \boxed{}$$