Schriftliche Aufgaben

Name:

Aufgabe 7

Gib jeweils ein Beispiel für ein Polynom aus der aktuellen Einheit an, das die gegebene Anzahl von Nullstellen besitzt.

a) Ein Polynom vierten Grades, das keine Nullstelle besitzt.

$p(x) = \boxed{}$.

b) Ein Polynom vierten Grades, das genau eine Nullstelle besitzt.

$p(x) = \boxed{}$.

c) Ein Polynom vierten Grades, das genau zwei Nullstellen besitzt.

$p(x) = \boxed{}$.

d) Ein Polynom vierten Grades, das genau drei Nullstellen besitzt.

$p(x) = \boxed{}$.

e) Ein Polynom vierten Grades, das genau vier Nullstellen besitzt.

$p(x) = \boxed{}$.

f) Ein Polynom dritten Grades, das genau eine Nullstelle besitzt.

$p(x) = \boxed{}$.

g) Ein Polynom dritten Grades, das genau zwei Nullstellen besitzt.

$p(x) = \boxed{}$.

h) Ein Polynom dritten Grades, das genau drei Nullstellen besitzt.

$p(x) = \boxed{}$.

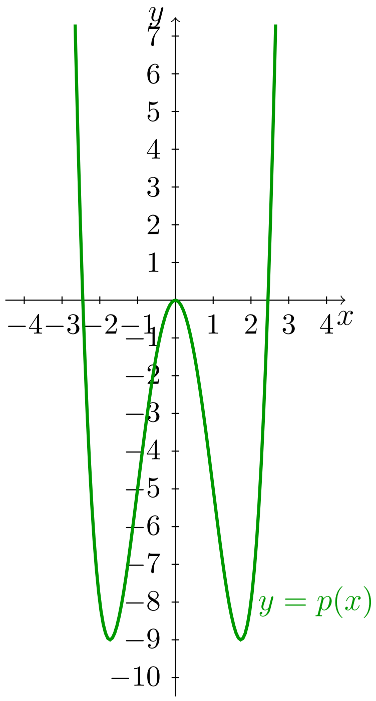
Weiter auf Seite 2

Aufgabe 8

Gegeben ist das Polynom p mit $p(x) = x^4 - 6x^2$. Der Graph des Polynoms ist rechts dargestellt.
Der Graph soll mit Geraden, die parallel zur x-Achse sind, geschnitten werden. Hierzu sei eine Zahl a vorgegeben. Zur Berechnung des x-Wertes, bei dem der Graph die Gerade mit der Gleichung $y = a$ schneidet, muss die Gleichung

$$x^4 - 6x^2 = a \qquad (*)$$

gelöst werden. In Abhängigkeit von a treten nun verschiedene Fälle auf.



a) Zeichne in die Graphik jeweils eine Gerade parallel zur x-Achse ein, die mit dem Graphen von p

- **a₁)** keinen Schnittpunkt hat (in blau),
- **a₂)** zwei Schnittpunkte hat (blau gestrichelt),
- **a₃)** drei Schnittpunkte hat (rot),
- **a₄)** vier Schnittpunkte hat (rot gestrichelt).

b) Substitutiere in $(*)$ $u = x^2$. Gib die quadratische Gleichung für u an, die dadurch entsteht.

$$\boxed{\qquad\qquad\qquad} \qquad (**)$$

c) Gib die Diskriminante von $(**)$ in Abhängigkeit von a an. $D = \boxed{\qquad}$

d) Für welche Werte von a besitzt die Gleichung $(**)$ die angebene Anzahl von Lösungen?

- **d₁)** $(**)$ besitzt keine reelle Lösung für $a < \boxed{\quad}$.
- **d₂)** $(**)$ besitzt genau eine reelle Lösung für $a = \boxed{\quad}$. Die Lösung ist $u = \boxed{\quad}$.
- **d₃)** $(**)$ besitzt eine positive und eine negative Lösung für $a > \boxed{\quad}$.

  Die Lösungen sind $u_1 = \boxed{\qquad} > 0$ und $u_2 = \boxed{\qquad} < 0$.
- **d₄)** $(**)$ besitzt $u_1 = 0$ als Lösung für $a = \boxed{\quad}$. Die andere Lösung ist $u_2 = \boxed{\quad}$.
- **d₅)** $(**)$ besitzt zwei verschiedene positive Lösungen für $\boxed{\quad} < a < \boxed{\quad}$.

  Die Lösungen sind $u_1 = \boxed{\qquad}$ und $u_2 = \boxed{\qquad}$.

Fortsetzung der Aufgabe auf nächster Seite

e) Übertrage nun die Ergebnisse der letzten Teilaufgabe auf den Schnitt des Graphen von p mit der Geraden $y = a$ in Abhängigkeit von a. Gib jeweils zuerst die Bedingung an a an und dann die gefragten Koordinaten.
Hinweis: Die x-Koordinaten erhältst Du durch Rücksubstitution.

e_1) Der Graph von p hat mit der Geraden $y = a$ keinen Schnittpunkt, falls $\boxed{}$ gilt.

e_2) Der Graph von p hat mit der Geraden $y = a$ genau zwei Schnittpunkte, falls
$a = \boxed{}$ oder $a > \boxed{}$ gilt.
Die Schnittpunkte besitzen die x-Koordinaten

$$x_1 = \boxed{}, \quad x_2 = \boxed{}.$$

Hinweis: Für beide Fälle kann die selbe Formel verwendet werden.

e_3) Der Graph von p hat mit der Geraden $y = a$ genau drei Schnittpunkte, falls
$\boxed{}$ gilt. Die Schnittpunkte besitzen die x-Koordinaten

$$x_1 = \boxed{}, \quad x_2 = \boxed{}, \quad x_3 = \boxed{}.$$

e_4) Der Graph von p hat mit der Geraden $y = a$ genau vier Schnittpunkte, falls
$\boxed{}$ gilt. Die Schnittpunkte besitzen die x-Koordinaten

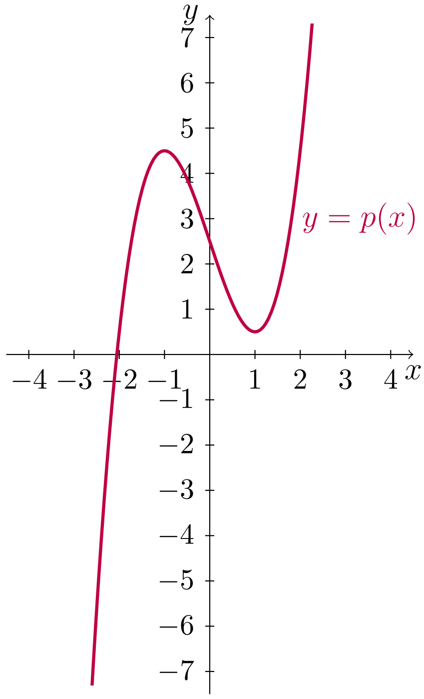
$$x_1 = \boxed{}, \quad x_2 = \boxed{},$$
$$x_3 = \boxed{}, \quad x_4 = \boxed{}.$$

Weiter auf Seite 4

Aufgabe 9

Gegeben ist das Polynom p mit $p(x) = x^3 - 3x + \frac{5}{2}$. Der Graph des Polynoms ist in der Graphik rechts dargestellt. Die einzige Nullstelle von p soll bestimmt werden, also die Lösung von

$$x^3 - 3x + \frac{5}{2} = 0.$$



a) Gib p und q und die Diskriminante D (in Bruchdarstellung) an.

$$p = \boxed{\quad}, \quad q = \boxed{\quad}, \quad D = \boxed{\quad}.$$

b) Gib die Substitution an, die für die Durchführung unserer Methode verwendet wird.

$$x = \boxed{\quad}.$$

c) Welche Gleichung der Ordnung 6 ergibt sich für y?

$$\boxed{\quad}.$$

d) Substituiere $z = y^3$ und gib die quadratische Gleichung an, die z erfüllen muss, damit y Lösung der vorigen Gleichung ist.

$$\boxed{\quad}.$$

e) Bestimme alle Lösungen z der letzten Gleichung. $z_1 = \boxed{\quad}$, $z_2 = \boxed{\quad}$.

f) Rücksubstitution I: Welche Lösungen y der Gleichung aus Teil d) ergeben sich hieraus?
Hinweis: Beachte, dass man die Lösung der Gleichung $y^3 = -4$ als $y = -\sqrt[3]{4}$ angibt, da Wurzeln aus negativen Zahlen nicht definiert werden.

$$y_1 = \boxed{\quad}, \quad y_2 = \boxed{\quad}.$$

g) Rücksubstitution II: Bestimme die Nullstelle x von p als exakten Ausdruck.
Hinweis: Beide Lösungen der Gleichung aus Teil d) führen auf den selben Wert für x.

$$x = \boxed{\quad}.$$

h) Nimm einen Taschenrechner zu Hilfe und gib die Nullstelle x von p auf vier Nachkommastellen genau an.

$$x \approx \boxed{\quad}.$$