Eine Gleichung 3. Ordnung

Aufgabe 4

Gesucht sind die Lösungen der Gleichung

$$x^3 - 6x + 9 \;=\; 0. \qquad (*)$$

Du lernst hier eine neue Methode kennen, wie eine Lösung systematisch gesucht werden kann. Du benötigst dazu die binomische Formel $(u+v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3$.

a) Es sei $x \;=\; y + \frac{2}{y}$. Berechne mit Hilfe der obigen binomischen Formel x^3.

$x^3 = \left(y + \frac{2}{y}\right)^3 =$

b) Substituiere $x = y + \frac{2}{y}$ in der Gleichung $(*)$. Gib die Gleichung an, die y erfüllen muss, damit x eine Lösung von $(*)$ ist.
Hinweis: In der Gleichung darf die Variable x nicht mehr vorkommen.

Gleichung für y:

c) Substitutiere nun $z = y^3$ und gib die quadratische Gleichung an, die sich für z ergibt.

Gleichung für z:

d) Berechne die Lösungen der letzten Gleichung. $z_1 =$, $z_2 =$.

e) Rücksubstitution I: Berechne die Lösungen der Gleichung aus b). $y_1 =$, $y_2 =$.

f) Rücksubstitution II: Welche Werte von x ergeben sich hieraus durch die Substitution aus Teil a)?

Aus y_1 ergibt sich $x_1 =$, aus y_2 ergibt sich $x_2 =$.

g) Nun kennen wir eine Lösung von $(*)$. Zeige mit Hilfe von Polynomdivision, dass $(*)$ keine weitere Lösung besitzt.