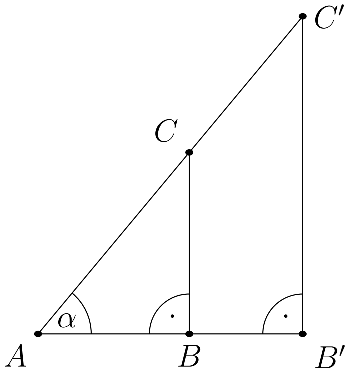
Trigonometrie – Skript mit Lösungen

1. Sinus und Cosinus am Dreieck



Die Dreicke ABC und $AB'C'$ sind ähnlich, also gilt:

$$\frac{\overline{AB'}}{\overline{AC'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$$
$$\frac{\overline{B'C'}}{\overline{AC'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$$

Diese Verhältnisse sind bei allen zu ABC ähnlichen Dreiecken gleich und hängen nur vom Winkel α ab.

Für rechtwinklige Dreiecke definiert man Abkürzungen für die Seitenverhältnisse.

Definition: In einem Dreieck ABC mit Winkel $\beta = 90°$ definiert man

Sinus: $$\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} =: \sin(\alpha)$$

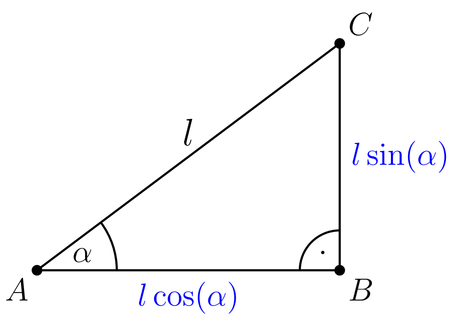
Cosinus: $$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} =: \cos(\alpha)$$

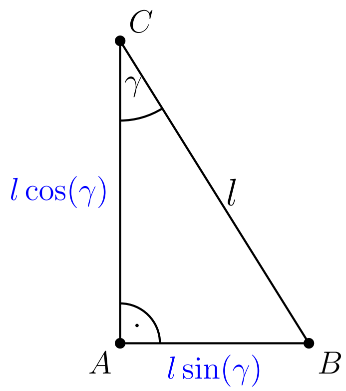
Merke: $\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}, \quad \cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$

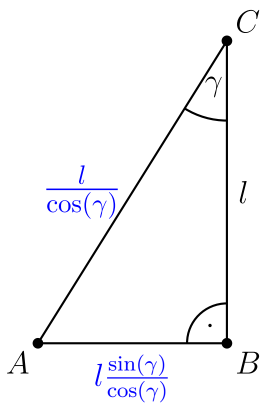
Aufgabe 1

Bei den folgenden Dreiecken ist eine der Seitenlängen l wie angegeben. Schreibe jeweils an die anderen beiden Seiten die Länge in Abhängigkeit von l und dem Sinus bzw. Cosinus des angegebenen Winkels. Achtung: Beim Dreieck ganz rechts ist eine der Kathetenlängen gegeben.

Lösung:



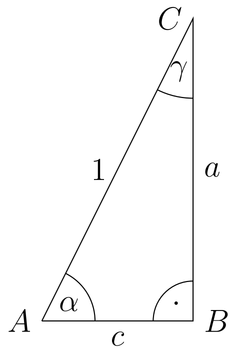




Satz: Für $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ gelten:

$$\begin{array}{lrcl} 1) & \sin(90^\circ - \alpha) & = & \cos(\alpha) \\ 2) & \cos(90^\circ - \alpha) & = & \sin(\alpha) \\ 3) & \big(\sin(\alpha)\big)^2 + \big(\cos(\alpha)\big)^2 & = & 1 \end{array}$$

Beweis: Siehe nebenstehende Zeichnung.
$\alpha + 90^\circ + \gamma = 180^\circ \;\Rightarrow\; \gamma = 90^\circ - \alpha$
$c = \cos(\alpha) = \sin(\gamma) \overset{\gamma=90^\circ-\alpha}{\Rightarrow}$ 1)
$a = \sin(\alpha) = \cos(\gamma) \overset{\gamma=90^\circ-\alpha}{\Rightarrow}$ 2)
Pythagoras $\Rightarrow$ $a^2 + c^2 = 1^2 \;\Rightarrow\; \big(\sin(\alpha)\big)^2 + \big(\cos(\alpha)\big)^2 = 1 \;\Rightarrow$ 3) $\square$

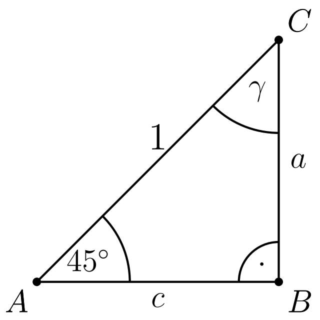


Satz: Folgende Werte für Sinus und Cosinus können exakt angegeben werden:

α	30°	45°	60°
$\sin(\alpha)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos(\alpha)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

Beweis: 1) Aufgrund der Winkelsumme im Dreieck gilt $\gamma = 45^\circ$. Also ist das Dreieck gleichschenklig, es gilt $c = a$. Aus dem Satz des Pythagoras folgt nun

$$a^2 + a^2 = 1^2, \text{ also } a = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$



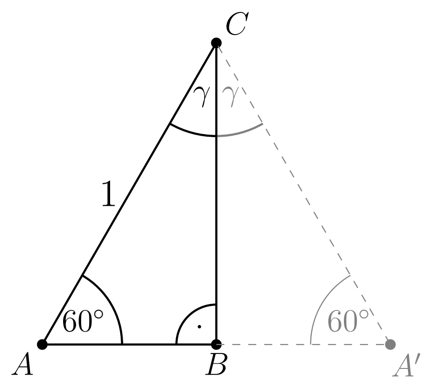
Nach der Definition von Sinus und Kosinus gilt

$$\sin(45^\circ) = \frac{a}{1} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos(45^\circ) = \frac{a}{1} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

2) $60^\circ + 90^\circ + \gamma = 180^\circ \;\Rightarrow\; \gamma = 30^\circ$
$\Rightarrow$ im Dreieck $AA'C$ misst der dritte Winkel ebenfalls 60°.
Also haben alle Seiten des Dreiecks $AA'C$ die Länge 1.

$$\Rightarrow \quad \overline{AB} = \frac{1}{2},$$

$$\overline{BC} \overset{\text{Pythagoras}}{=} \sqrt{1 - \overline{AB}^2} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

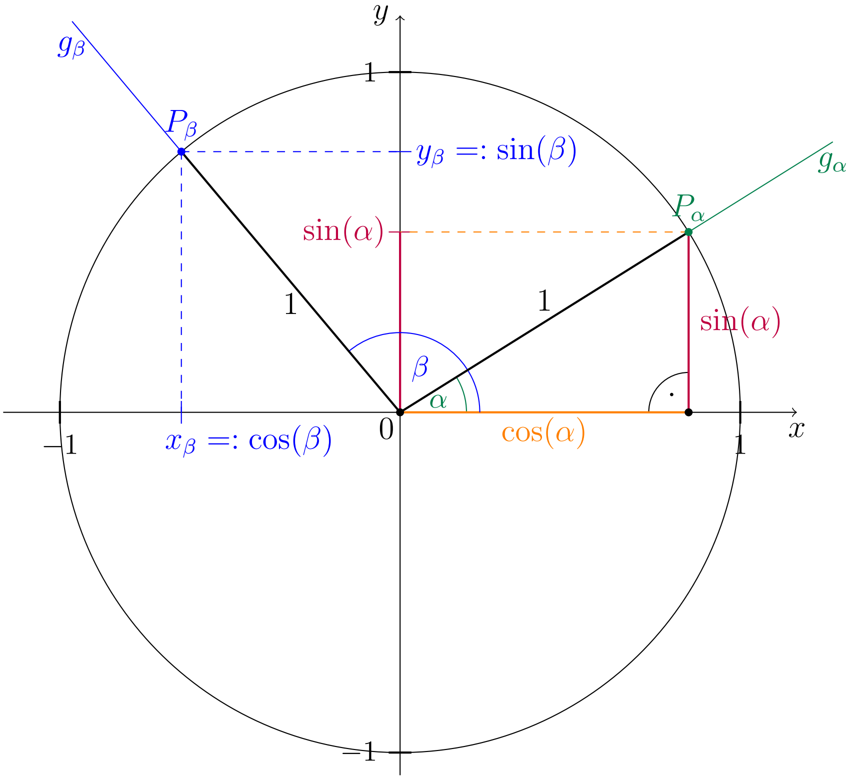


Nach der Definition von Sinus und Kosinus gilt

$$\begin{array}{lcl} \sin(60^\circ) = \frac{\overline{BC}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}, & & \cos(60^\circ) = \frac{\overline{AB}}{1} = \frac{1}{2}. \\ \sin(30^\circ) = \frac{\overline{AB}}{1} = \frac{1}{2}, & & \cos(30^\circ) = \frac{\overline{BC}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \;\square \end{array}$$

2. Sinus und Cosinus für beliebige Winkel

Satz: Für $0° < \alpha < 90°$ sei g_α die Halbgerade, die durch Drehung der positiven x-Achse um den Ursprung mit Winkel α im Gegenuhrzeigersinn entsteht. Dann hat der Schnittpunkt P_α von g_α mit dem Einheitskreis die Koordinaten $(x_\alpha \mid y_\alpha)$ mit $x_\alpha = \cos(\alpha)$, $y_\alpha = \sin(\alpha)$.



Definition: Für beliebige Winkel β sei g_β die Halbgerade, die durch Drehung der positiven x-Achse um den Ursprung mit Winkel β im Gegenuhrzeigersinn entsteht (für $\beta < 0°$ Drehung mit Winkel $-\beta$ im Uhrzeigersinn). $P_\beta(x_\beta \mid y_\beta)$ sei der Schnittpunkt des Einheitskreises mit g_β. Man definiert

$$\sin(\beta) \;:=\; y_\beta, \qquad \cos(\beta) \;:=\; x_\beta.$$

Bemerkung: Nun sind $\sin(\alpha)$ und $\cos(\alpha)$ für beliebige Winkel α definiert. Nach dem letzten Satz stimmt diese Definition für $0° < \alpha < 90°$ mit der alten Definition überein.

Folgerung: $\big(\sin(\alpha)\big)^2 + \big(\cos(\alpha)\big)^2 = 1$ für alle Winkel α, denn der Punkt $P_\alpha\big(\cos(\alpha) \mid \sin(\alpha)\big)$ liegt auf dem Einheitskreis.

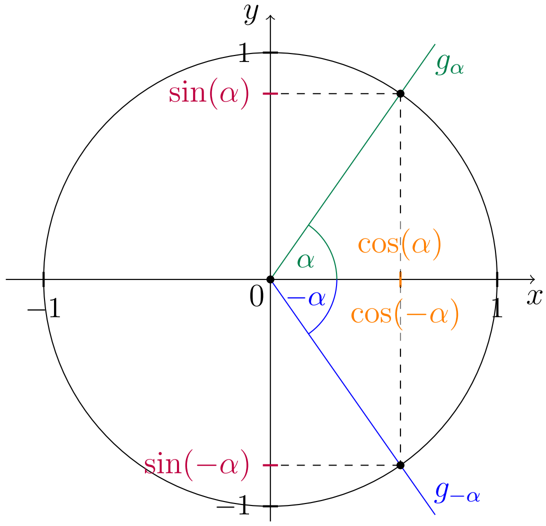
Merktabelle exakter Werte für Sinus und Cosinus:

α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin(\alpha)$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$
$\cos(\alpha)$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$

Satz: Für beliebige Winkel α gelten:

1) $\sin(360° + \alpha) = \sin\alpha$
2) $\cos(360° + \alpha) = \cos\alpha$
3) $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$
4) $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$

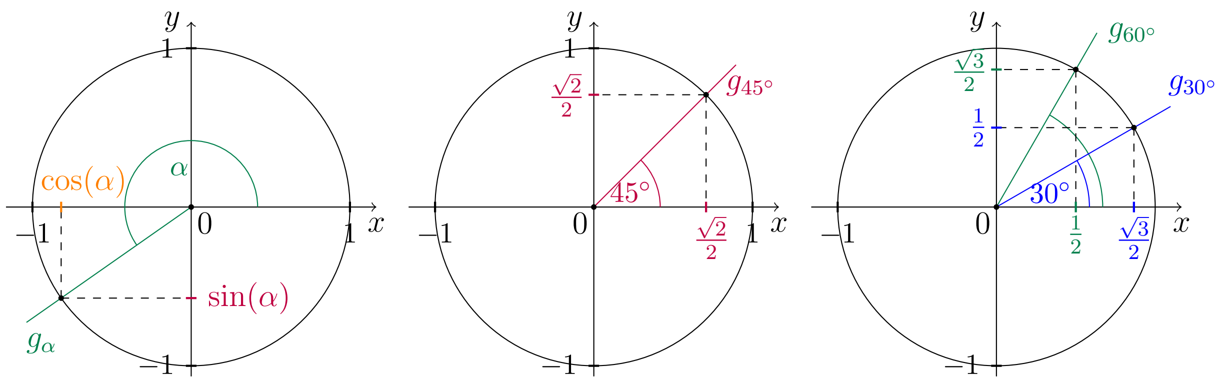
Beweis: 1), 2) klar. Zu 3), 4):



□

Aufgabe 2

Zur Erinnerung sind in den drei folgenden Einheitskreisen die Definition von Sinus und Cosinus und die Werte für spezielle Winkel eingezeichnet, die bereits früher berechnet wurden.



Fülle die folgenden Tabellen aus. Trage exakte Werte ein.

Lösung: **a)**

α	$0°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$	$450°$	$-90°$	$-180°$
$\sin\alpha$	0	1	0	-1	0	1	-1	0
$\cos\alpha$	1	0	-1	0	1	0	0	-1

b)

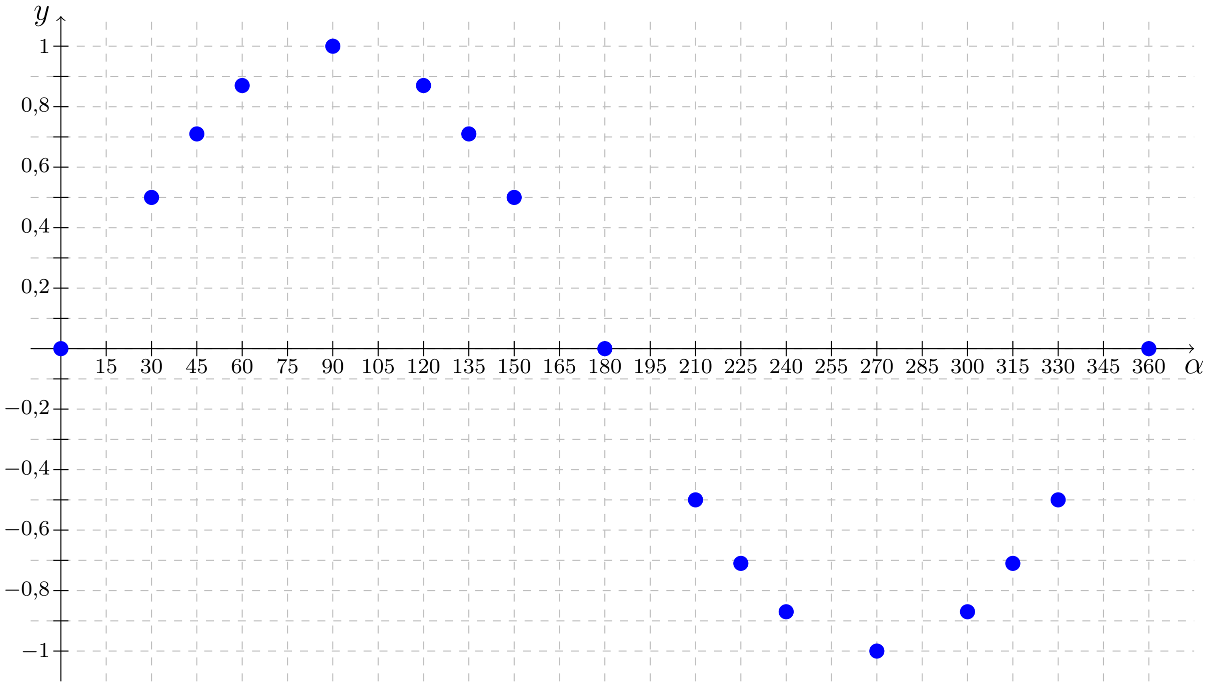
α	$30°$	$45°$	$60°$	$120°$	$135°$	$150°$	$210°$	$225°$	$240°$	$300°$	$315°$	$330°$
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

Aufgabe 3

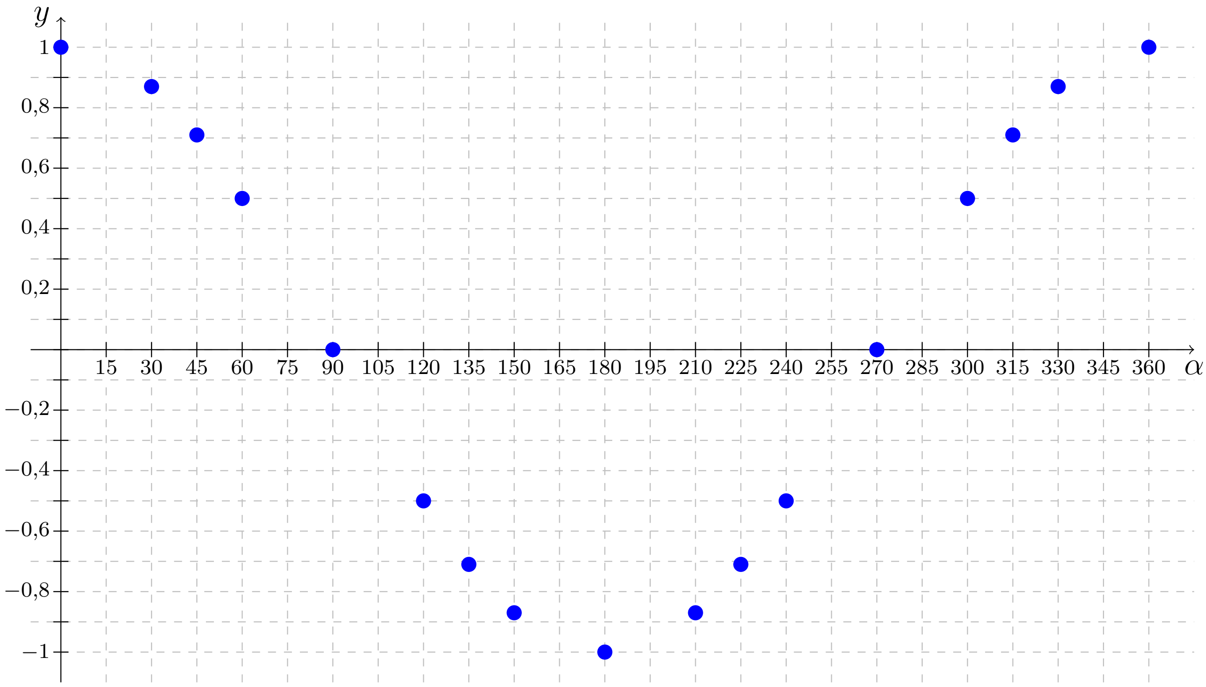
In der letzten Aufgabe wurden die Werte von $\sin(\alpha)$ und $\cos(\alpha)$ für spezielle Winkel α bestimmt.

a) Zeichne für jeden dieser Winkel α mit $0° \leq \alpha \leq 360°$ den Punkt $(\alpha \mid \sin(\alpha))$ in das Koordinatensystem ein.

Hinweis: $\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}71$, $\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}87$.



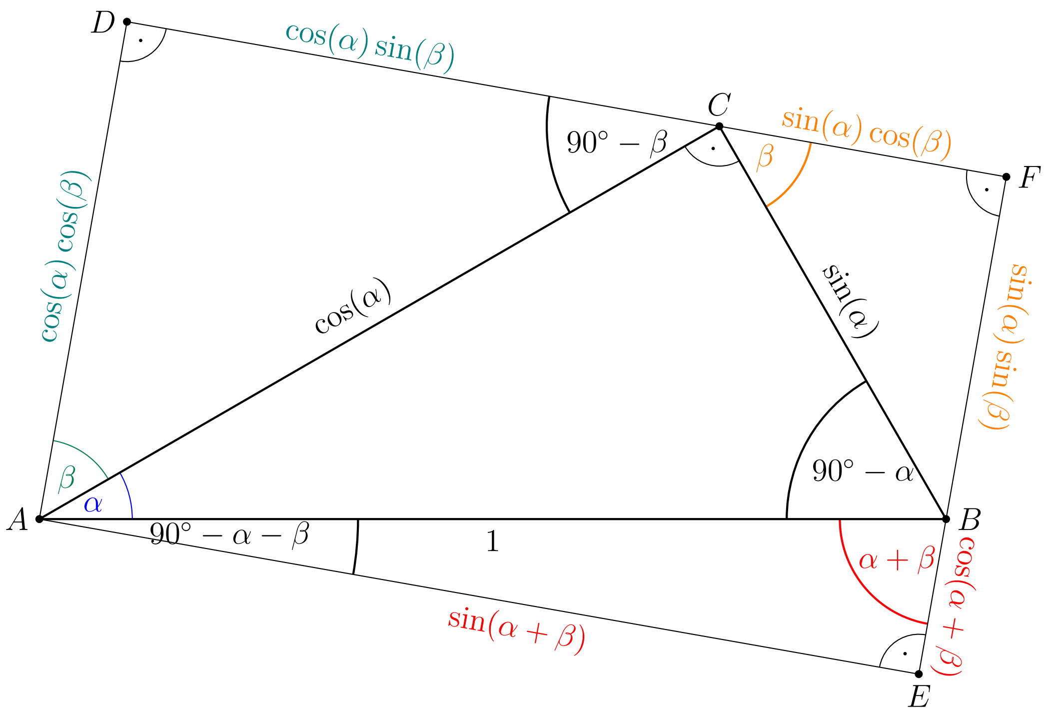
b) Zeichne für jeden dieser Winkel α mit $0° \leq \alpha \leq 360°$ den Punkt $(\alpha \mid \cos(\alpha))$ in das Koordinatensystem ein.



3. Die Additionstheoreme

Aufgabe 4

Gegeben sind zwei Winkel α, β mit $0 < \alpha + \beta < 90°$. Das Ziel dieser Aufgabe ist, die Werte von $\sin(\alpha + \beta)$ und $\cos(\alpha + \beta)$ geometrisch aus den Werten von $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$, $\sin(\beta)$ und $\cos(\beta)$ zu bestimmen. Hierzu wird zunächst ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit Hypothenusenlänge 1 und dem gegebenen Winkel α beim Punkt A gezeichnet. Beachte, dass der Winkel beim Punkt B im Allgemeinen nicht mit dem gegebenen Winkel β übereinstimmt. Zu diesem Dreieck wird wie in der Zeichnung dargestellt ein Rechteck konstruiert, so dass die Seite AD mit der Dreiecksseite AC den gegebenen Winkel β einschließt und die Dreieckspunkte B, C auf den Rechteckseiten liegen.



a) Wie berechnet sich der Winkel bei B im Dreieck ABC aus dem Winkel α?

b) Gib jeweils die Größe des orange eingezeichneten und des rot eingezeichneten Winkels in Abhängigkeit von α, β an und schreibe die Ergebnisse in die Zeichnung.

c) Schreibe an jede der Strecken die Länge als Funktion von α, β.

Da die gegenüberliegenden Seiten des Rechtecks $AEFD$ gleich lang sind, folgt

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta) &= \sin(\alpha)\cdot\cos(\beta)+\cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)\\ \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) &= \sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)+\cos(\alpha+\beta)\end{aligned}$$

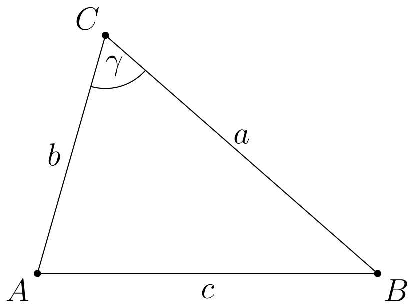
Lösung: Siehe oben stehende Graphik.

Satz: Für beliebige Winkel α, β gelten die **Additionstheoreme**

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta) &= \sin(\alpha)\cdot\cos(\beta)+\cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)\\ \cos(\alpha+\beta) &= \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta)-\sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)\end{aligned}$$

4. Sinussatz und Cosinussatz

Aufgabe 5



Der **Cosinussatz** besagt: In jedem Dreieck ABC gilt

$$c^2 \;=\; a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma). \qquad (1)$$

Hierbei sind für a, b, c die Längen der entsprechend bezeichneten Seiten einzusetzen, γ bezeichnet den von den Seiten a, b eingeschlossenen Winkel.

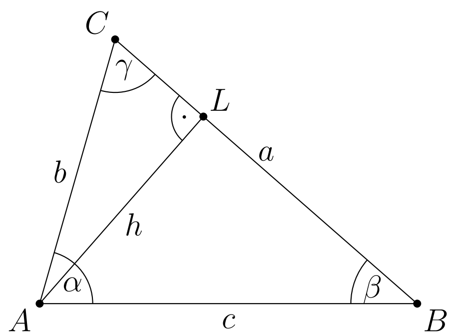
a) Sei $\gamma = 90°$. Zu welcher Gleichung wird (1) in diesem Fall? Wie heißt der entsprechende Satz?

$\cos(90°) = 0 \;\Rightarrow$ (1) wird zu $a^2 + b^2 = c^2$.
Das ist der Satz des Pythagoras.

b) Gegeben ist ein Dreieck durch $a = 4$cm, $b = 3$cm und $\gamma = 60°$. Berechne die Seitenlänge c.

$c^2 = 25 - 24\cos(60°) = 25 - 12 = 13 \;\Rightarrow\; c = \sqrt{13} \approx 3{,}61.$

c) Nun gelte $0° < \alpha, \beta, \gamma < 90°$. Wenn Du die folgenden Teilaufgaben löst, beweist Du den Cosinussatz. In dem neben stehend skizzierten Dreieck sind dazu bereits das Lot h von A auf die Seite a und der Lotfußpunkt L eingezeichnet.



c₁) Drücke die Länge $\overline{LC}$ durch b und γ aus.

$\overline{LC} =$ $b\cos(\gamma)$.

c₂) Welche Gleichung ergibt der Satz des Pythagoras für das Dreieck ALC?

$h^2 + \overline{LC}^2 = b^2.$

c₃) Welche Gleichung ergibt der Satz des Pythagoras für das Dreieck ABL?

$\overline{BL}^2 + h^2 = c^2.$

c₄) Ersetze in der Gleichung aus c₃) $\overline{BL}^2$ durch $(a - \overline{LC})^2$ und quadriere aus.

$a^2 - 2a\overline{LC} + \overline{LC}^2 + h^2 = c^2.$

c₅) Vereinfache die Gleichung aus c₅) durch Verwendung von c₃).

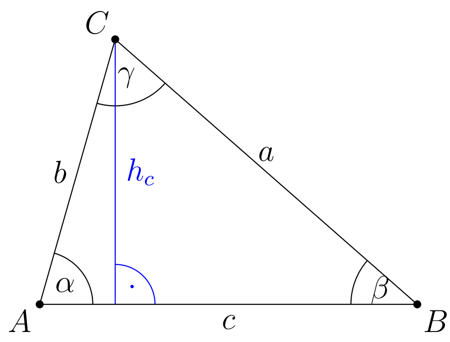
$a^2 - 2a\overline{LC} + b^2 = c^2.$

c₆) Setze das Ergebnis von c₂) in die letzte Gleichung ein. Welche Gleichung folgt?

$a^2 - 2ab\cos(\gamma) + b^2 = c^2.$

Aufgabe 6

Es sei ein Dreieck ABC mit $0 < \alpha, \beta, \gamma < 90°$ gegeben.



a) **a$_1$)** Zeichne die Höhe h_c auf c ein.

a$_2$) Drücke die Länge von h_c durch a und β aus.

$h_c = a\sin(\beta)$.

a$_3$) Drücke die Länge von h_c durch b und α aus.

$h_c = b\sin(\alpha)$.

a$_4$) Welche Beziehung zwischen a, b, α, β folgt hieraus?

$a\sin(\beta) = b\sin(\alpha)$.

b) Führe die entsprechenden Schritte für die Höhe h_b auf b durch. Welche Beziehung zwischen a, c, α, γ folgt hieraus?

$h_b = c\sin(\alpha) = a\sin(\gamma)$.

c) Welche Beziehung für die Quotienten $\frac{a}{\sin(\alpha)}, \frac{b}{\sin(\beta)}, \frac{c}{\sin(\gamma)}$ folgt aus a) und b)? Diese Beziehung heißt **Sinussatz**.

Sinussatz: $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$.

d) Gegeben ist ein Dreieck durch die Angaben $a = 5$cm, $\alpha = 50°$ und $\beta = 60°$. Berechne den Winkel γ und die Längen der Seiten b und c (Taschenrechner erforderlich).

$\gamma =$ $180° - 50° - 60° = 70°$.

Länge von b: $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} \Rightarrow b = \frac{a\sin(\beta)}{\sin(\alpha)} = 5\frac{\sin(60°)}{\sin(50°)} \approx 5{,}65$cm.

Länge von c: $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} \Rightarrow c = \frac{a\sin(\gamma)}{\sin(\alpha)} = 5\frac{\sin(70°)}{\sin(50°)} \approx 6{,}13$cm.