Geraden, Matrizen

Wiederholung

Definition: Eine Abbildung A heißt linear, wenn sie von der Form

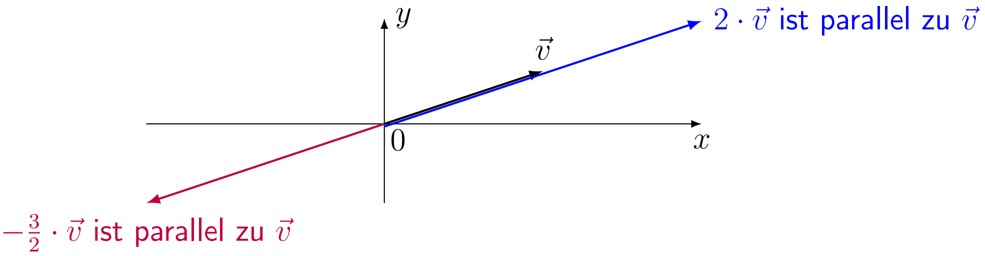
$$A\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = v_x \cdot \vec{a} + v_y \cdot \vec{b} = \begin{bmatrix} \vec{a} & \vec{b} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$$

mit festen Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^2$ ist.

Algebraische Eigenschaften: Für jede lineare Abbildung A gelten

(L1) $A(\vec{v} + \vec{w}) = A(\vec{v}) + A(\vec{w})$ und
(L2) $A(\lambda \cdot \vec{v}) = \lambda \cdot A(\vec{v})$.

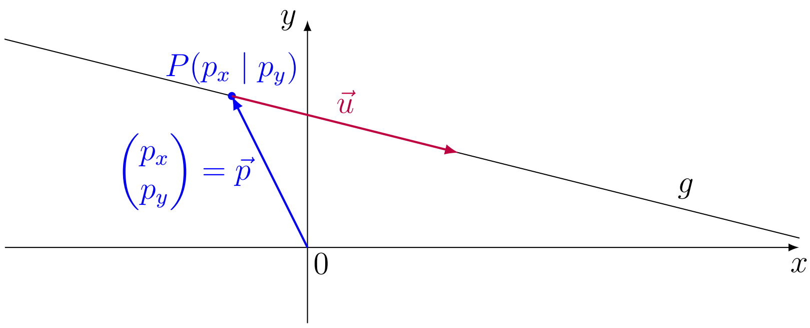
Parallelität: Zwei Vektoren $\vec{0} \neq \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$ sind genau dann parallel, wenn es ein $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $\vec{w} = \lambda \cdot \vec{v}$.



Geraden: Eine Gerade g ist durch

$$g : \vec{s}(t) = \vec{p} + t \cdot \vec{u} \quad (t \in \mathbb{R})$$

gegeben. Der Vektor $\vec{p}$ heißt Stützvektor und $\vec{u} \neq \vec{0}$ heißt Richtungsvektor.



Ist $\vec{p} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix}$, dann besteht die Gerade g aus dem Punkt $P(p_x \mid p_y)$ und aus allen Punkten, die durch Verschiebung des Punktes P mit beliebigem Vielfachen des Richtungsvektors entstehen.

Weiter auf Seite 2

Aufgabe 1

Gegeben sind die Geraden

$$g : \vec{s}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R}), \quad h : \vec{s}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})$$

und die Abbildung A mit dem Matrix-Schema

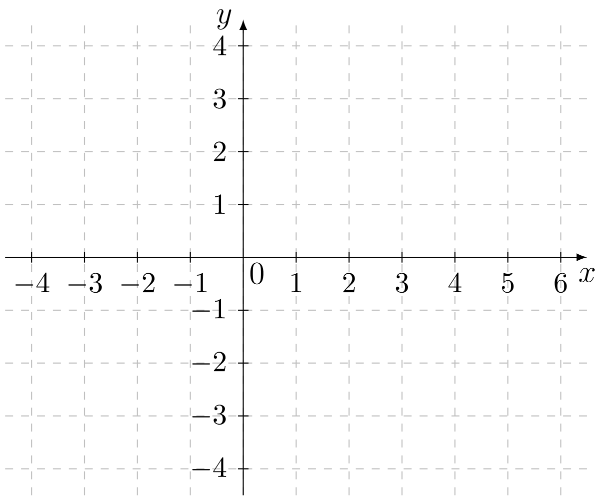
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

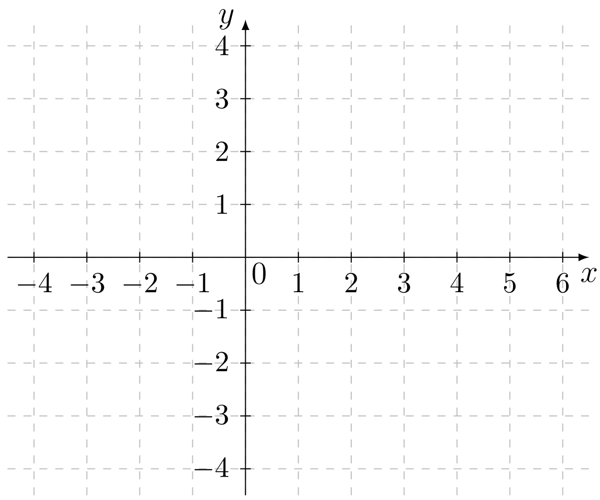
a) Zeichne die Geraden in das linke Koordinatensystem ein. Warum sind die Geraden parallel?

b) Die Geraden werden mit der Abbildung A abgebildet. Berechne die Bildgeraden.

$$g' : \vec{s}(t) = \boxed{} + t \cdot \boxed{} \quad (t \in \mathbb{R}), \quad h' : \vec{s}(t) = \boxed{} + t \cdot \boxed{} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

c) Zeichne die Bildgeraden g', h' in das rechte Koordinatensystem ein. Sind sie parallel?





Aufgabe 2

Es seien $\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ die Einheitsvektoren und A eine lineare Abbildung mit dem Matrix-Schema $A = \begin{bmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{bmatrix}$ (a_x, a_y, b_x, b_y sind irgendwelche reellen Zahlen).

a) Berechne die Abbildungswerte der Einheitsvektoren und gib sie mit Hilfe der Einträge a_x, a_y, b_x, b_y an.

$$A(\vec{e}_x) = \boxed{}, \quad A(\vec{e}_y) = \boxed{}.$$

b) Ergänze mit Hilfe der Ergebnisse aus Teil a) die Formeln im folgenden Satz.
Im Matrix-Schema der Abbildung A steht in der ersten Spalte der Vektor

$\vec{a} = \boxed{}$ und in der zweiten Spalte der Vektor $\vec{b} = \boxed{}$.