Berechnung von Eigenvektoren

Aufgabe 3

Gegeben ist die lineare Abbildung A mit dem Matrix-Schema

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}.$$

Die Abbildung besitzt die Eigenwerte $\lambda_1 = 3$ und $\lambda_2 = 8$.

a) Berechne alle Eigenvektoren von A zum Eigenwert $\lambda_1 = 3$. Gehe hierzu folgendermaßen vor:

a$_1$) Setze die gegebenen Daten für $a_x, a_y, b_x, b_y, \lambda$ in die Gleichungen (i) und (ii) aus dem letzten Satz ein.

(i) $\boxed{}\, v_x + \boxed{}\, v_y \;=\; 0$

(ii) $\boxed{}\, v_x + \boxed{}\, v_y \;=\; 0$

a$_2$) Löse jede der beiden Gleichungen nach v_x auf. Was beobachtest Du?

(i) $\Leftrightarrow$ $\boxed{}\, v_x = \boxed{}\, v_y \;\Leftrightarrow\; v_x = \boxed{}$

(ii) $\Leftrightarrow$ $\boxed{}\, v_x = \boxed{}\, v_y \;\Leftrightarrow\; v_x = \boxed{}$

Beobachtung: $\boxed{}$

a$_3$) Gib einen Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ an, dessen Koordinaten die Gleichungen (i) und (ii) erfüllen.

Hinweis: Du kannst z.B. für v_y eine Zahl wählen und dann v_x berechnen.

$\vec{v} = \boxed{}$

a$_4$) Gib alle Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ an, deren Koordinaten die Gleichungen (i) und (ii) erfüllen.

Hinweis: Es ist geschickt, $v_y = 2s$ zu setzen, wobei s alle reellen Zahlen durchläuft.

$\vec{v} = \boxed{}$

a$_5$) Welche der Vektoren aus der letzten Teilaufgabe sind Eigenvektoren von A zum Eigenwert $\lambda_1 = 3$?

$\boxed{}$

b) Berechne entsprechend alle Eigenvektoren von A zum Eigenwert $\lambda_2 = 8$.