Eigenvektoren

Aufgabe 1

a) Gib die Eigenvektor-Gleichung für einen Eigenvektor $\vec{v}$ der linearen Abbildung A zum Eigenwert λ an.

b) Beschreibe, was bei der Abbildung eines Eigenvektors mit diesem geschieht.

c) Zeige, dass der Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor der linearen Abbildung $A = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ ist. Gib auch den zugehörigen Eigenwert an.

Weiter auf Seite 2

Aufgabe 2

Gegeben ist die lineare Abbildung A mit dem Matrix-Schema $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.
Die Abbildung A besitzt Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda = 2$. Fülle die Lücken in den Teilaufgaben und finde einen Eigenvektor $\vec{v}$ zum Eigenwert $\lambda = 2$.

a) Um einen Eigenvektor $\vec{v}$ zum Eigenwert $\lambda = 2$ zu berechnen, muss folgende Gleichung gelöst werden.

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \boxed{} \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}.$$

b) Nun wird die Matrix auf den Vektor angewandt. Die rechte Seite bleibt unverändert.

$$v_x \cdot \left(\boxed{}\right) + v_y \cdot \left(\boxed{}\right) = \boxed{} \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}.$$

c) Nun kann die rechte Seite geschickt umgeschrieben werden.

$$v_x \cdot \left(\boxed{}\right) + v_y \cdot \left(\boxed{}\right) = v_x \cdot \left(\boxed{}\right) + v_y \cdot \left(\boxed{}\right).$$

d) Die Ausdrücke der rechten Seite auf beiden Seiten abziehen.

$$v_x \cdot \left(\boxed{}\right) - v_x \cdot \left(\boxed{}\right) + v_y \cdot \left(\boxed{}\right) - v_y \cdot \left(\boxed{}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

e) Die Ausdrücke mit v_x bzw. mit v_y jeweils zusammenfassen.

$$v_x \cdot \left(\boxed{}\right) + v_y \cdot \left(\boxed{}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

f) Die linke Seite als einen Vektor schreiben.

$$\left(\boxed{}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

g) Damit die Gleichung aus f) gilt, müssen die folgenden zwei Gleichungen erfüllt sein.
(i) $\boxed{} = 0$ und (ii) $\boxed{} = 0$.

h) Die beiden Gleichungen sind $\boxed{}$.

i) Errate eine Lösung und gib einen Eigenvektor an. $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \left(\boxed{}\right)$.