Satz des Euklid über Primzahlen

Aufgabe 4

Beweise durch Widerspruch, dass es unendlich viele Primzahlen gibt. Oder anders formuliert: Wenn P die Menge aller Primzahlen ist, dann hat P unendlich viele Elemente.
Fülle dazu die Lücken im Text.

Gegenannahme:

Die Menge P aller Primzahlen hat ______ Elemente.

$\Rightarrow$ ______ $= \{p_1, p_2, p_3, \dots, p_n\}$, wobei n die Anzahl der Elemente von ______ ist und $p_1, \dots, p_n$ alle ______ sind.

Setze $q := p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_n + 1$.

$\Rightarrow$ q lässt beim Teilen durch p_1 den Rest ______

q lässt beim Teilen durch p_2 den Rest ______

$\vdots$

q lässt beim Teilen durch p_n den Rest ______

$\Rightarrow$ q ist durch ______ der Primzahlen $p_1, \dots, p_n$ teilbar.

Beachte, dass $q > 1$ gilt.

$\Rightarrow$ Entweder ist q eine ______,

oder q kann als Produkt von ______ $q_1, \dots, q_k$ dargestellt werden.

Dann ist q oder q_1 eine Primzahl, die ______ in P enthalten ist.

Dies ist ein ______ dazu, dass P ______ enthält.

Also ist die Gegenannahme ______.

Damit ist bewiesen:

Die Menge P aller Primzahlen hat ______.