Primzahlen

Aufgabe 3

Du kennst sicher die Primzahlen $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \ldots$. In dieser Aufgabe geht es darum, wie man neue Primzahlen finden kann, ohne systematisch alle natürlichen Zahlen der Reihe nach zu untersuchen, ob sie eine Primzahl sind oder nicht. Schon Euklid hatte dazu die folgende Idee. Multipliziere alle bereits bekannten Primzahlen $2, 3, 5, 7, \ldots, p_n$ und addiere 1. D.h. berechne die Zahl

$$q_n \;=\; 2 \cdot 3 \cdots p_n + 1$$

Die Frage ist nun, ob die so berechnete Zahl q_n eine Primzahl ist.

a) Warum ist die Zahl q_n nicht durch 2 teilbar? Warum ist q_n durch keine der Primzahlen $2, 3, \ldots, p_n$ teilbar?

b) Berechne $q_2 = 2 \cdot 3 + 1$, q_3, q_4, q_5 und überprüfe, ob sie Primzahlen sind. Du kannst die unten stehende Primzahltabelle verwenden.

c) Berechne $q_6 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1$ und weise nach, dass q_6 keine Primzahl ist. Bestimme die Primfaktorzerlegung von p_6.
Hinweis: Teile q_6 durch die Primzahlen zwischen 50 und 60 (Taschenrechner).

d) Die in der vorigen Teilaufgabe berechnete Zahl q_6 ist also keine Primzahl. Trotzdem erhalten wir aus der Primfaktorzerlegung von q_6 zwei weitere Primzahlen, die nicht in der Ausgangsmenge $\{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$ enthalten sind. Welche sind das?

Primzahlen von 1 bis 2360:

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43
47	53	59	61	67	71	73	79	83	89	97	101	103	107
109	113	127	131	137	139	149	151	157	163	167	173	179	181
191	193	197	199	211	223	227	229	233	239	241	251	257	263
269	271	277	281	283	293	307	311	313	317	331	337	347	349
353	359	367	373	379	383	389	397	401	409	419	421	431	433
439	443	449	457	461	463	467	479	487	491	499	503	509	521
523	541	547	557	563	569	571	577	587	593	599	601	607	613
617	619	631	641	643	647	653	659	661	673	677	683	691	701
709	719	727	733	739	743	751	757	761	769	773	787	797	809
811	821	823	827	829	839	853	857	859	863	877	881	883	887
907	911	919	929	937	941	947	953	967	971	977	983	991	997
1009	1013	1019	1021	1031	1033	1039	1049	1051	1061	1063	1069	1087	1091
1093	1097	1103	1109	1117	1123	1129	1151	1153	1163	1171	1181	1187	1193
1201	1213	1217	1223	1229	1231	1237	1249	1259	1277	1279	1283	1289	1291
1297	1301	1303	1307	1319	1321	1327	1361	1367	1373	1381	1399	1409	1423
1427	1429	1433	1439	1447	1451	1453	1459	1471	1481	1483	1487	1489	1493
1499	1511	1523	1531	1543	1549	1553	1559	1567	1571	1579	1583	1597	1601
1607	1609	1613	1619	1621	1627	1637	1657	1663	1667	1669	1693	1697	1699
1709	1721	1723	1733	1741	1747	1753	1759	1777	1783	1787	1789	1801	1811
1823	1831	1847	1861	1867	1871	1873	1877	1879	1889	1901	1907	1913	1931
1933	1949	1951	1973	1979	1987	1993	1997	1999	2003	2011	2017	2027	2029
2039	2053	2063	2069	2081	2083	2087	2089	2099	2111	2113	2129	2131	2137
2141	2143	2153	2161	2179	2203	2207	2213	2221	2237	2239	2243	2251	2267
2269	2273	2281	2287	2293	2297	2309	2311	2333	2339	2341	2347	2351	2357