Kontraposition

Aufgabe 1

Gegeben ist der Satz: Sei n eine natürliche Zahl. Wenn n^2 durch 3 teilbar ist, dann ist auch n durch 3 teilbar.

a) Identifiziere Voraussetzung(en) und Behauptung(en).

b) Formuliere die Umkehrung.

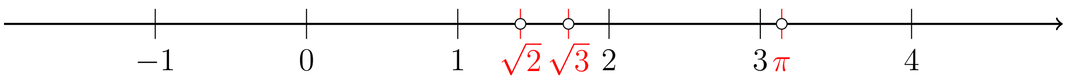
c) Formuliere die Kontraposition.

Beachte, dass die Grundvoraussetzung „n ist eine natürliche Zahl“ immer am Anfang stehen muss (und auch nicht negiert wird).

Rationale und irrationale Zahlen

Die Menge der rationalen Zahlen ist die Menge der Brüche: $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z} \text{ mit } n \neq 0 \right\}$. ($\mathbb{Z}$ bezeichnet die Menge der ganzen Zahlen.)

Zeichnet man die rationalen Zahlen gedanklich auf dem Zahlenstrahl ein, so bleiben dort noch (unsichtbare) Lücken. In der Graphik sind drei der Lücken eingezeichnet.



Die Zahlen, die zu den Lücken gehören, heißen **irrationale Zahlen**. Wir werden heute beweisen, dass $\sqrt{2}$ (die positive Lösung der Gleichung $x^2 = 2$) eine irrationale Zahl ist. Die Menge der **reellen Zahlen** $\mathbb{R}$ besteht aus den rationalen und den irrationalen Zahlen. Zeichnet man die reellen Zahlen gedanklich auf dem Zahlenstrahl ein, so bleiben keine Lücken mehr. Dies nennt man die **Vollständigkeit** der reellen Zahlen.

Aufgabe 2

Eine Zahl $x \in \mathbb{R}$ heißt rational, wenn sie sich als Bruch $x = \frac{m}{n}$ mit ganzzahligen m, n und $n \neq 0$ darstellen lässt. Gegeben seien eine feste rationale Zahl $x \neq 0$ und eine beliebige reelle Zahl y. Folgender Satz soll untersucht werden: Ist y nicht rational, so ist auch $x \cdot y$ nicht rational.

a) Gib die Voraussetzung und Behauptung des Satzes an.

b) Bilde die Kontraposition.

c) Beweise die Kontraposition.
Hinweis: Benütze z.B. die Darstellung $x \cdot y = \frac{k}{l}$.