Gemischte Aufgaben

Aufgabe 5

Beweise mit vollständiger Induktion, dass $3^n > 12n$ für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 4$ gilt.
Hinweis: Benütze im Induktionsschritt z.B. $3 \cdot 12n > 12n + 12n$.

Aufgabe 6

Für natürliche Zahlen n ist die Fakultät erklärt durch $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1$. Insbesondere gilt $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$. Beweise mit vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! \;=\; 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + n \cdot n! \;=\; (n+1)! - 1.$$

gilt.

Aufgabe 7

Wo liegt der Fehler? Wir behaupten: Alle Menschen sind Frauen. Beweis: Wir stellen fest, dass es Frauen gibt. Wir greifen nun eine Frau heraus und beweisen die Behauptung durch vollständige Induktion in der folgenden Form:

$a(n)$: Jede Menge von n Menschen, die diese Frau enthält, besteht ausschließlich aus Frauen.

1) IA: Die Behauptung ist offensichtlich richtig für $n = 1$.

2) Induktionsschritt:
IV: Jede Menge, die aus n Menschen besteht und diese Frau enthält, besteht aus lauter Frauen.
IB: Jede Menge, die aus $n+1$ Menschen besteht und diese Frau enthält, besteht aus lauter Frauen.

Beweis der IB: Haben wir eine Menge, die $n+1$ Menschen enthält und diese Frau, so entfernen wir vorübergehend einen Menschen aus dieser Menge (aber nicht die Frau). Nach der IV besteht die übrig bleibende Menge aus lauter Frauen. Bringt man nun diesen Menschen zur Menge zurück und entfernt statt dessen einen anderen (wieder nicht die Frau), so bleibt nach IV wiederum eine Menge aus lauter Frauen zurück, so dass der vorhin entfernte Mensch ebenfalls eine Frau sein muss. Also folgt, dass auch jeder Mensch aus der Menge mit $n+1$ Menschen eine Frau ist.

3) Induktionsschluss: Jede beliebig große (endliche) Menge von Menschen, die die anfänglich gewählte Frau enthält, besteht ausschließlich aus Frauen. Also sind alle Menschen Frauen.