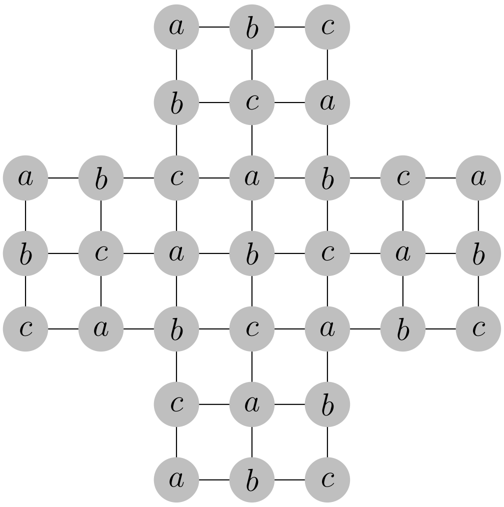
Solitär und Invarianten

Wir markieren die Plätze auf dem Spielfeld mit a, b, c wie in der Graphik eingezeichnet.



Das Spielfeld hat 33 Plätze, davon sind je 11 mit a bzw. b bzw. c bezeichnet.
Es gibt 6 verschiedene Typen von erlaubten Sprüngen. Vervollständige die Liste.

$a\ b\ c$		

Wir bezeichnen mit a_n, b_n, c_n die Anzahl der Steine auf den Plätzen a bzw. b bzw. c vor dem n-ten Zug.

Wie ändern sich die Zahlen bei einem Sprung vom Typ $a\ b\ c$? Fülle die Tabelle aus.

$a_{n+1} =$		$b_{n+1} - a_{n+1} =$	
$b_{n+1} =$		$c_{n+1} - a_{n+1} =$	
$c_{n+1} =$		$c_{n+1} - b_{n+1} =$	

Wie ändern sich die Zahlen bei einem Sprung vom Typ $c\ a\ b$? Fülle die Tabelle aus.

$a_{n+1} =$		$b_{n+1} - a_{n+1} =$	
$b_{n+1} =$		$c_{n+1} - a_{n+1} =$	
$c_{n+1} =$		$c_{n+1} - b_{n+1} =$	

Für die restlichen Typen von Sprüngen ergeben sich entsprechende Zahlen.

$\Rightarrow$ $b_n - a_n, c_n - a_n, c_n - b_n$ ändern sich in jedem Schritt

um $\boxed{}$ oder um $\boxed{}$.

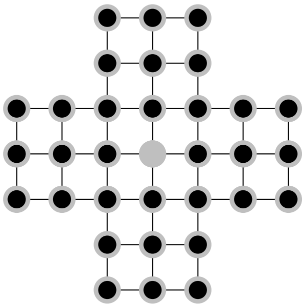
$\Rightarrow$ $b_n - a_n, c_n - a_n, c_n - b_n$ sind invariant $\boxed{}$

Weiter auf Seite 2

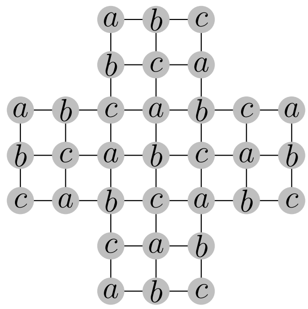
Aufgabe 4

Nun sind zu Beginn des Spiels alle Plätze besetzt außer dem mittleren, wie unten dargestellt. Wir wollen nun feststellen, auf welchen der Plätze der letzte Stein stehen kann, falls nur einer übrig bleibt. Dazu verwenden wir die Einteilung in a-, b- und c-Plätze und die gefundenen Invarianten. Wir bezeichnen wieder mit a_n die Anzahl der Steine auf a-Plätzen vor dem n-ten Zug, entsprechend b_n, c_n.

Spielstand zu Beginn



Bezeichnung der Plätze



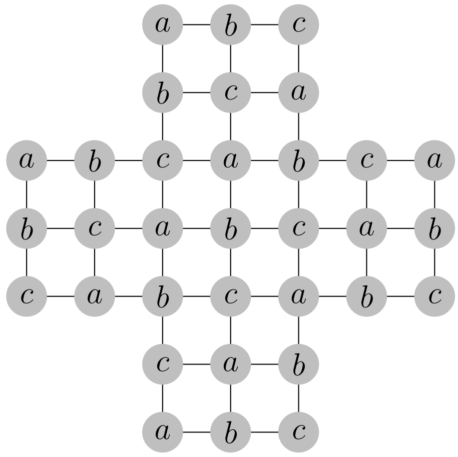
a) Bestimme die Zahlen $a_1, b_1, c_1, b_1{-}a_1, c_1{-}a_1, c_1{-}b_1$, also jeweils die Anzahlen bzw. Differenzen vor dem ersten Zug.

b) Gib die Differenzen $b_n - a_n, c_n - a_n, c_n - b_n$ an, falls der letzte Stein (nach dem $(n-1)$-ten Zug) auf einem a-Platz steht. Ist dies gemäß der Invarianten möglich oder nicht?

c) Gib die Differenzen $b_n - a_n, c_n - a_n, c_n - b_n$ an, falls der letzte Stein (nach dem $(n-1)$-ten Zug) auf einem b-Platz steht. Ist dies gemäß der Invarianten möglich oder nicht?

d) Gib die Differenzen $b_n - a_n, c_n - a_n, c_n - b_n$ an, falls der letzte Stein (nach dem $(n-1)$-ten Zug) auf einem c-Platz steht. Ist dies gemäß der Invarianten möglich oder nicht?

e) Markiere auf dem nebenstehenden Spielfeld die Plätze blau, auf denen der letzte Stein stehen kann. Wir wissen aber noch nicht, ob es wirklich zu jedem der markierten Plätze einen Spielzug gibt, bei dem der letzte Stein auf dem markierten Platz stehen bleibt.



f) Zusatzaufgabe: Nun können noch mehr Plätze für den letzten Stein ausgeschlossen werden durch die folgende Überlegung. Wenn es einen Spielzug gibt, bei dem der letzte Stein auf einem Platz F stehen bleibt, dann gibt es auch einen Spielzug, bei dem der letzte Stein auf dem Platz G stehen bleibt, der durch Drehung von F um den Mittelpunkt des Spielfeldes erreicht wird. Haben wir diesen Platz G bereits vorher ausgeschlossen, dann ist auch F als möglicher Platz für den letzten Spielstein ausgeschlossen.

Streiche alle Plätze, die auf diese Weise ausgeschlossen werden können, rot durch.

Wie viele Plätze, auf denen der letzte Stein stehen kann, bleiben übrig?