

Invarianten

Aufgabe 2

Auf einem Tisch liegen rote, blaue und grüne Spielsteine. In jedem Schritt werden zwei Steine verschiedener Farbe weggenommen und stattdessen ein Stein der dritten Farbe dazugegan.

Achtung: Die Regel ist ein bisschen anders als bei den Chamäleons.

- a) Überlege im allgemeinen Fall, wie sich die Anzahlen ändern. Fülle dazu folgende Tabelle aus (x_n, y_n, z_n bezeichne die Anzahl der Steine mit Farbe X, Y, Z vor dem n -ten Schritt).

Farbe X und Farbe Z werden weggenommen, Farbe Y dazugegan:

$x_n \longrightarrow x_{n+1} =$		$y_{n+1} - x_{n+1} =$	
$y_n \longrightarrow y_{n+1} =$		$z_{n+1} - x_{n+1} =$	
$z_n \longrightarrow z_{n+1} =$		$z_{n+1} - y_{n+1} =$	

- b) Seien r_n die Anzahl der roten, b_n die Anzahl der blauen und g_n die Anzahl der grünen Spielsteine vor dem n -ten Schritt. Ergänze die folgenden Sätze.

Die Differenzen $r_n - b_n, r_n - g_n, b_n - g_n$ ändern sich in jedem Schritt um oder .

Die Differenzen $r_n - b_n, r_n - g_n, b_n - g_n$ sind invariant .

- c) Zu Beginn des Spiels liegen 11 rote, 9 blaue und 8 grüne Spielsteine auf dem Tisch.

c₁) Gib die Werte an: $r_1 - b_1 =$, $r_1 - g_1 =$, $b_1 - g_1 =$

c₂) Gib an, welche Werte die Differenzen annehmen können.
Hinweis: Trage die möglichen Werte z.B. in der Form $0, \pm 3, \pm 6, \dots$ ein.

$r_n - b_n =$	
$r_n - g_n =$	
$b_n - g_n =$	

c₃) Falls am Ende nur ein Stein übrig bleibt, dann hat er die Farbe .

- d) Nun liegen zu Beginn 12 rote, 10 blaue und 8 grüne Spielsteine auf dem Tisch.

d₁) Gib die Werte an: $r_1 - b_1 =$, $r_1 - g_1 =$, $b_1 - g_1 =$

d₂) Gib an, welche Werte die Differenzen annehmen können.

$r_n - b_n =$	
$r_n - g_n =$	
$b_n - g_n =$	

d₃) Wie viele Steine bleiben am Ende mindestens übrig? Welche Farbe können Sie haben?