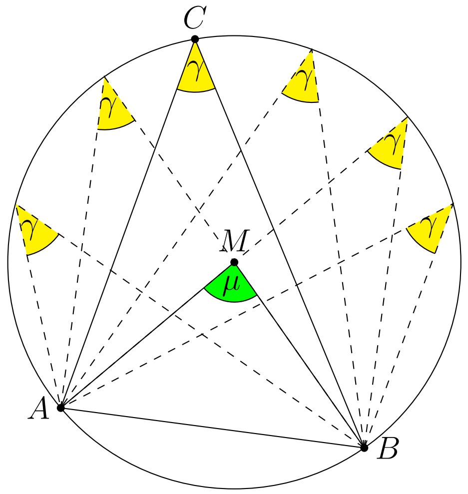
Der Umfangswinkelsatz

Aufgabe 2



Satz vom Umfangswinkel: Gegeben sind ein Kreis mit Mittelpunkt M und drei Punkte A, B, C auf dem Kreis, so dass C auf der selben Seite der Strecke AB liegt wie M. Dann ist der Mittelpunktswinkel $\mu = \angle AMB$ doppelt so groß wie der Umfangswinkel $\gamma = \angle ACB$, d.h. es gilt $\mu = 2\gamma$.
Zum Beweis dieses Satzes werden drei Fälle unterschieden.

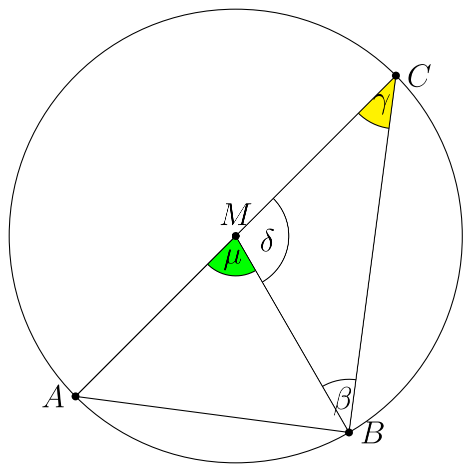
Fall 1: M liegt auf der Dreiecksseite AC oder auf der Dreiecksseite BC.

Fall 2: M liegt innerhalb des Dreiecks ABC.

Fall 3: M liegt außerhalb des Dreiecks ABC.

a) Markiere in der obigen Graphik die Dreiecke, die zum Fall 1 gehören, mit roter Farbe, und diejenigen Dreiecke, die zum Fall 2 gehören, mit blauer Farbe.

b) **Fall 1:** Beweise $\mu = 2\gamma$ im Fall, dass M auf der Dreiecksseite AC liegt. Fülle dazu den Lückentext aus.



B und C haben von M den $\boxed{}$ Abstand.

Also ist das Dreieck BCM $\boxed{}$.

Hieraus folgt $\beta = \boxed{}$. (1)

Aus der Winkelsumme im Dreieck BCM folgt

mit (1) $\delta = \boxed{}$. (2)

δ, μ sind Nebenwinkel $\Rightarrow$ $\mu = \boxed{}$.

Mit (2) folgt $\mu = \boxed{}$.

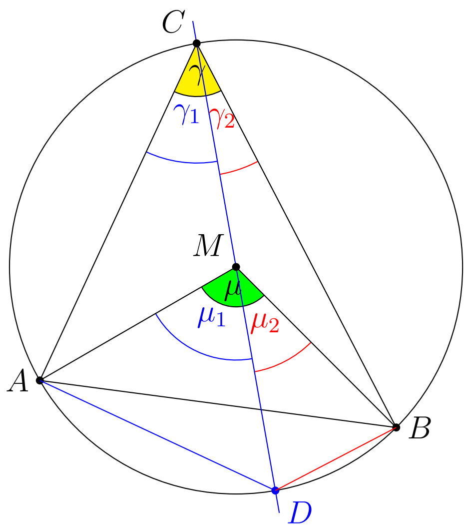
$\Rightarrow$ $\mu = 2\gamma$.

Fall 1 Fortsetzung: Für den Fall, dass M auf der Dreiecksseite BC liegt, kann $\mu = 2\gamma$ genauso bewiesen werden.

Weiter auf nächster Seite

Man kann $\mu = 2\gamma$ für die beiden anderen Fälle entsprechend beweisen. Aber es gibt einen eleganteren Weg. Man zeichnet eine geeignete Hilfslinie ein und benutzt den ersten Fall.

c) Fall 2: Beweise $\mu = 2\gamma$ in dem Fall, dass M im Inneren des Dreiecks ABC liegt. Fülle dazu den Lückentext aus.



In der Graphik links wurde die Gerade durch M und C eingezeichnet. D ist der zweite Schnittpunkt (neben C) dieser Geraden mit dem Kreis. Der Winkel γ wurde in zwei Winkel γ_1, γ_2 aufgeteilt, der Winkel μ entsprechend.

Anwendung von Fall 1 auf das Dreieck ADC liefert

$\mu_1 = \boxed{\quad\quad}$.

Anwendung von Fall 1 auf das Dreieck DBC liefert

$\mu_2 = \boxed{\quad\quad}$.

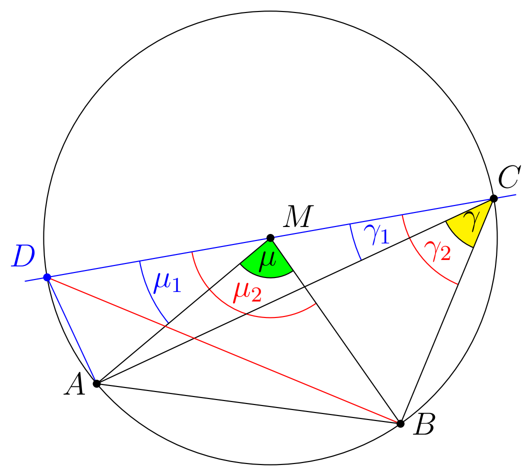
Addition liefert

$\mu = \boxed{\quad\quad\quad\quad\quad\quad}$.

$\Rightarrow \quad \mu = 2\gamma$

d) Fall 3: Beweise $\mu = 2\gamma$ in dem Fall, dass M außerhalb des Dreiecks ABC liegt. Fülle wieder den Lückentext aus.

In der Graphik wurde die Gerade durch M und C eingezeichnet, D ist wieder der zweite Schnittpunkt mit dem Kreis. Für die Definition der Winkel $\gamma_1, \gamma_2, \mu_1, \mu_2$ siehe Skizze.



Anwendung von Fall 1 auf das Dreieck DAC liefert

$\mu_1 = \boxed{\quad\quad}$.

Anwendung von Fall 1 auf das Dreieck DBC liefert

$\mu_2 = \boxed{\quad\quad}$.

Subtraktion liefert

$\mu = \boxed{\quad\quad\quad\quad\quad\quad}$.

$\Rightarrow \quad \mu = 2\gamma \qquad \square$