

Rechnen in \mathbb{C}

Aufgabe 2

Gib folgende komplexe Zahlen in der Form $z = x + yi$ an:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} & z_1 = (1 + 2i) - (5 - 3i), & \text{b)} & z_2 = (1 + 2i)^2, & \text{c)} & z_3 = \frac{3 + i}{1 + i}, \\ \text{d)} & z_4 = \frac{4 + 2i}{1 - i}, & \text{e)} & z_5 = \frac{3 - 4i}{-3 + 4i}, & \text{f)} & z_6 = \frac{-3 + 4i}{4 + 3i}. \end{array}$$

Zusatzaufgabe 2

- a) Zeige: $z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$ und $z_2 = -z_1$ sind zwei Lösungen der Gleichung $z^2 = i$. Kannst Du daraus zwei Lösungen von $z^2 = -i$ gewinnen?
- b) Es sei $z \in \mathbb{C}$ mit $z^4 = -1$.
Zeige, dass für $z_1 := i \cdot z$, $z_2 := -z$, $z_3 := -i \cdot z$ gilt: $z_j^4 = -1$ ($j = 1, 2, 3$).
- c) Finde mit Hilfe von a) eine Lösung z von $z^4 = -1$.
- d) Gib vier Lösungen von $z^4 = -1$ an.

Zusatzaufgabe 3

Zeige: Die quadratische Gleichung

$$z^2 - 4z + 13 = 0$$

besitzt die beiden Lösungen $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 2 - 3i$.