Zusatzblatt
Zur eigenen Bearbeitung

Zusatzaufgabe 1

a) Bestimme die Koordinaten des Scheitels S der Parabel, die durch die Gleichung $y = x(1-x)$ beschrieben wird. Was ist der maximale Funktionswert, den die Funktion f mit $f(x) = x(1-x)$ für $x \in \mathbb{R}$ annimmt?

b) Folgere aus a), welches das Maximum der Funktion g mit $g(x) = x^2(1-x^2)$ für $x \in \mathbb{R}$ und welches das Maximum der Funktion h mit $h(x) = x\sqrt{1-x^2}$ für $x \in [0,1]$ ist. Für welchen x-Wert werden die Maxima angenommen?

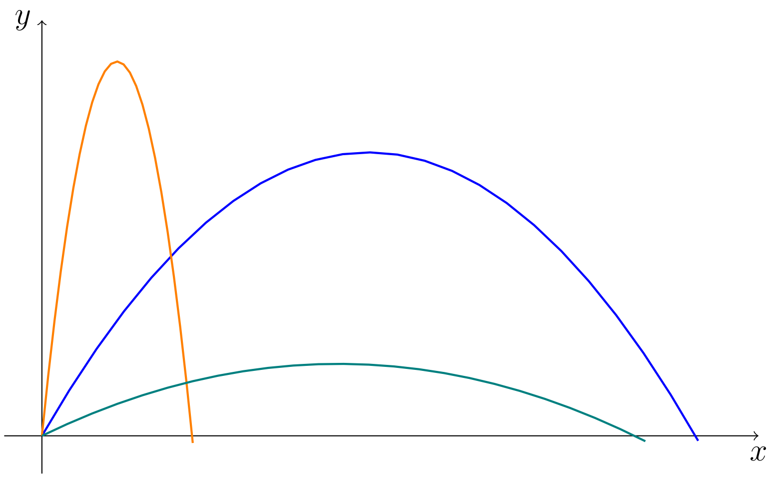
c) Ein Ball wird vom Punkt $(0 \mid 0)$ aus in Richtung des Vektors $c\binom{\cos\varphi}{\sin\varphi}$ geworfen. c gibt den Betrag der Geschwindigkeit und φ den Winkel zwischen Wurfrichtung und x-Achse an. Der Ball fliegt längs einer parabelförmigen Bahn mit der Gleichung

$$y = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}x - 10\frac{x^2}{c^2\cos^2\varphi}$$

Berechne die x-Koordinate des Punktes, an dem der Ball auf den Boden ($y = 0$) auftrifft. Für welchen Wert von $\cos\varphi$ fliegt der Ball am weitesten (bei konstantem c)?

Hinweis: Verwende $\sin\varphi = \sqrt{1-\cos^2\varphi}$ und das Ergebnis aus Teil b).

Plots von Wurfparabeln mit der selben Anfangsgeschwindigkeit und verschiedenen Wurfrichtungen:



Hinweis zur Lösungskontrolle: $x_{\max} = \frac{c^2}{10} \cdot \frac{1}{2}$.

Anmerkung: Die hier benützten Formeln gelten nur im Vakuum. In der Realität wird der Ball durch den Luftwiderstand abgebremst. Dann ist die Flugkurve keine Parabel, und der optimale Wurfwinkel ist kleiner als 45°. Die Bahnkurve mit Luftreibung kann unter gewissen vereinfachenden Annahmen analytisch berechnet werden. Siehe z.B. `https://matheplanet.de/default3.html?article=735`.