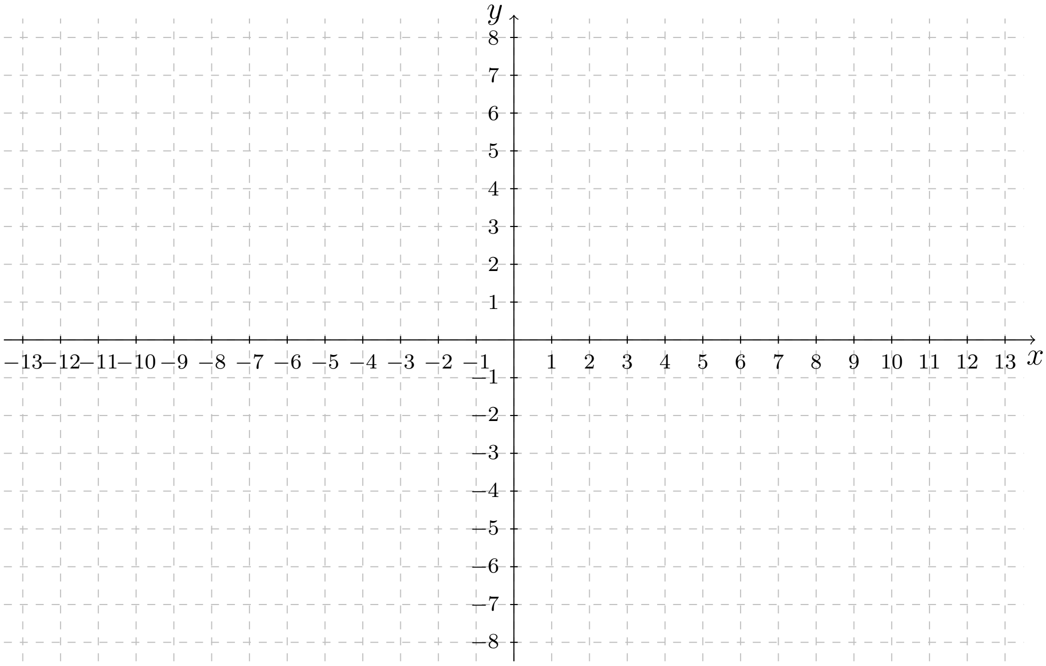
Arbeitsblatt 4: Die Hyperbelgleichung

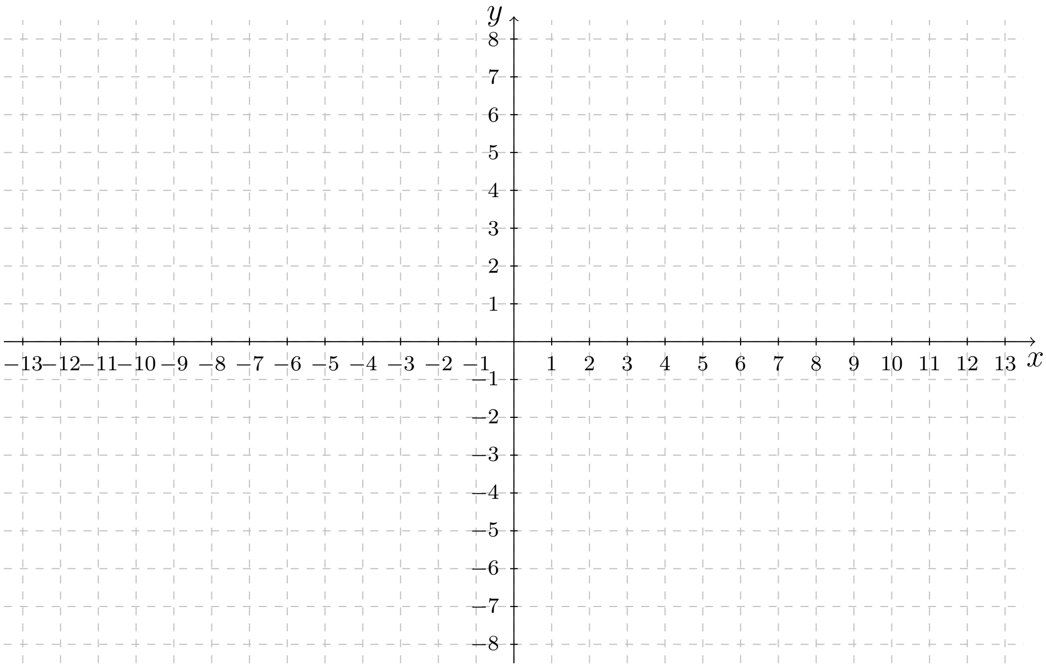
Aufgabe 3

Berechne in jeder Teilaufgabe die Größen a, b, e für die gegebene Hyperbel. Zeichne jeweils die Brennpunkte, die Scheitel, die Asymptoten und die Hyperbel ein ($\sqrt{11} \approx 3{,}3,\ \sqrt{2} \approx 1{,}4$).

a) $\dfrac{x^2}{25} - \dfrac{y^2}{11} = 1$

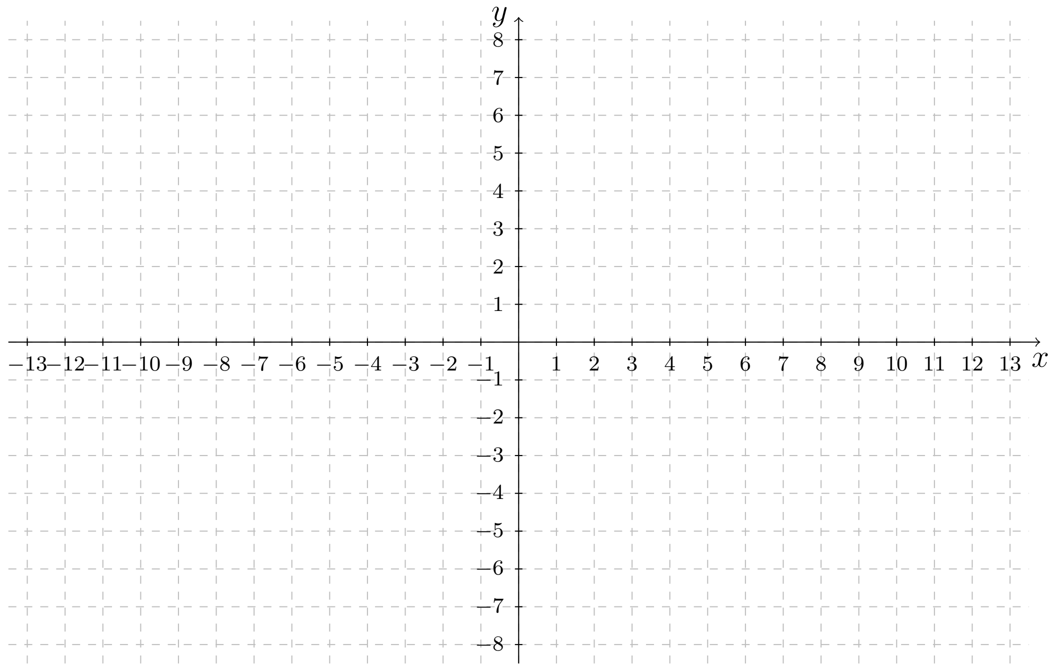


b) $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{4} = 1$



Bitte wenden

c) $x^2 - y^2 = 1.$



Satz: Jeder Punkt, dessen Koordinaten die Gleichung $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ erfüllen, liegt auf der Hyperbel, deren Punkte die Bedingung

$$\left|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}\right| \;=\; 2a$$

mit $F_1(-e \mid 0)$ und $F_2(e \mid 0)$, $e = \sqrt{a^2 + b^2}$ erfüllen.

Beweis: Sei $P(x \mid y)$ mit $x > 0$ und $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$
Beweise als Erstes, dass

$$\overline{PF_1} \;=\; \frac{e}{a}x + a \qquad (*)$$

gilt.

Löse zunächst die Koordinatengleichung nach y^2 auf:

$$y^2 \;=\; \frac{b^2x^2}{a^2} - b^2.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
\overline{PF_1}^2 &= (x+e)^2 + y^2 \\
&= x^2 + 2ex + e^2 + \frac{b^2x^2}{a^2} - b^2 \\
&= \frac{x^2}{a^2}(\underbrace{a^2 + b^2}_{=e^2}) + 2ex + \underbrace{e^2 - b^2}_{=a^2} \\
&= \left(\frac{xe}{a} + a\right)^2.
\end{aligned}$$

Dies beweist $(*)$. Genauso folgt

$$\overline{PF_2} \;=\; \left|\frac{e}{a}x - a\right| \;=\; \frac{e}{a}x - a. \qquad (**)$$

Aus $(*)$ und $(**)$ folgt nun $\overline{PF_1} - \overline{PF_2} = 2a$.

Für $x < 0$ gelten $(*)$ und $(**)$ entsprechend, es müssen nur die rechten Seiten mit (-1) multipliziert werden. $\square$