Wurzelziehen von Hand

Du weißt, wie man schriftlich dividiert. Ganz ähnlich kann man schriftlich Quadratwurzeln näherungsweise berechnen. Das kannst Du hier lernen.

Im Folgenden siehst Du, wie man $\sqrt{x}$ für $x = 12{,}5316$ berechnet. Zur besseren Beschreibung des Verfahrens schreiben wir $\sqrt{12{,}5316} = a{,}bc\ldots$, d.h. b ist die erste Nachkommastelle von x und c die zweite. Nun wird beschrieben, wie man a, b, c berechnet.

Die Zahl a erhält man, indem man die höchste ganzzahlige Quadratzahl $a^2 \leq x$ sucht. In unserem Fall ist $a = 3$. Das Quadrat dieser Zahl schreibt man unter x und zieht es vom ganzzahligen Anteil von x ab, ähnlich wie beim Dividieren. Dann holt man die ersten zwei Nachkommastellen von x dazu herunter (siehe Schritt 1). Anders als beim Dividieren muss man immer zwei Stellen auf ein Mal ergänzen.

Schritt 1:

$$\begin{array}{lcl} \sqrt{12{,}5316} & = & 3, \\ \;\,-9 & & \\ \hline \quad\;\, 353 & & \end{array}$$

Im Schritt 2 erhält man die erste Nachkommastelle b folgendermaßen: Man sucht eine Zahl b so, so dass

$$353 : (2 \cdot 10a + b) = b, \ldots$$

gilt. Durch Ausprobieren ergibt sich $b = 5$. Nun multipliziert man 65 mit 5 und zieht das Ergebnis von 353 ab, genau wie beim schriftlichen Dividieren.

Tipp: Zur Abschätzung von b kann man zunächst $353 : 20a = 353 : 60 = 5, \ldots$ rechnen.

Bestimmung von b :

$$\begin{array}{lcl} \sqrt{12{,}5316} & = & 3{,}b \\ \;\,-9 & & \\ \hline \quad\;\, 353\!: 6b = b, \ldots & & \end{array}$$

Schritt 2:

$$\begin{array}{lcl} \sqrt{12{,}5316} & = & 3{,}5 \\ \;\,-9 & & \\ \hline \quad\;\, 353\!: 65 = 5, \ldots & & \\ \;\,-325 & & \\ \hline \qquad 28 & & \end{array}$$

Schritt 3:

$$\begin{array}{lcl} \sqrt{12{,}5316} & = & 3{,}54 \\ \;\,-9 & & \\ \hline \quad\;\, 353\!: 65 = 5, \ldots & & \\ \;\,-325 & & \\ \hline \qquad 2816\!: 704 = 4, \ldots & & \\ \qquad -2816 & & \\ \hline \qquad\qquad 0 & & \end{array}$$

Nun holt man die nächsten zwei Stellen von x dazu herunter und sucht die nächste Stelle c. Dazu soll

$$2829 : (2 \cdot 100a + 2 \cdot 10b + c) \;=\; c, \ldots$$

gelten. Durch Ausprobieren folgt $c = 4$.

Bestimmung von c :

$$\begin{array}{lcl} \sqrt{12{,}5316} & = & 3{,}5c \\ \;\,-9 & & \\ \hline \quad\;\, 353\!: 65 = 5, \ldots & & \\ \;\,-325 & & \\ \hline \qquad 2816\!: 70c = c, \ldots & & \end{array}$$

Der Rest ist nun Null, d.h. wir haben die Wurzel exakt bestimmt.

Hier noch ein Beispiel für die Berechnung der ersten paar Nachkommastellen einer Wurzel. Trage die fehlenden Zahlen ein, in Kästchen der selben Farbe kommt die selbe Zahl:

$$\begin{array}{lcl} \sqrt{21} & = & \sqrt{21{,}000000\ldots} = \boxed{}{,}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\ldots \\ & & -16 \\ \hline & & \quad 500\!: 8\boxed{} = \boxed{}, \ldots \\ & & \;\, -425 \\ \hline & & \qquad 7500\!: 90\boxed{} = \boxed{}, \ldots \\ & & \quad -7264 \\ \hline & & \qquad\quad 23600\!: 916\boxed{} = \boxed{}, \ldots \\ & & \qquad -18324 \end{array}$$

Da $\sqrt{21}$ nicht rational ist, endet das Verfahren nie, man kann beliebig lange weiterrechnen.

Aufgabe 4: Berechne **a)** $\sqrt{3}$ und **b)** $\sqrt{26}$ bis einschließlich der dritten Nachkommastelle.
Zusatzaufgabe: Berechne $\sqrt{11{,}\overline{1}} = \sqrt{11{,}111\ldots}$.

Warum das Verfahren funktioniert, kannst Du auf der Rückseite erfahren.

Erklärung des Verfahrens:

Zum Verständnis des Verfahrens für das Wurzelziehen wird eine Verallgemeinerung der binomischen Formel $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ benötigt. Es gilt

$$(a+b+c)^2 \;=\; a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.$$

Das Quadrat der Summe von drei Zahlen ist die Summe der Quadrate und aller doppelten Produkte. Wenn Du willst, kannst Du die Formel nachrechnen, indem Du das Produkt $(a+b+c)\cdot(a+b+c)$ ausrechnest.

Wir benötigen jedoch eine andere Sortierung der Formel, nämlich

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2 &= a^2 + \underbrace{2ab + b^2}_{=(2a+b)\cdot b} + \underbrace{2ac + 2bc + c^2}_{=(2a+2b+c)\cdot c} \\ &= a^2 + (2a+b)\cdot b + (2a+2b+c)\cdot c.\end{aligned}$$

Nun wird diese Formel auf die Zahl $x = a{,}bc = a + \frac{b}{10} + \frac{c}{100}$ angewandt:

$$\begin{aligned}x^2 &= \Big(a + \frac{b}{10} + \frac{c}{100}\Big)^2 \\ &= a^2 + \Big(2a + \frac{b}{10}\Big)\cdot\frac{b}{10} + \Big(2a + 2\frac{b}{10} + \frac{c}{100}\Big)\cdot\frac{c}{100}\end{aligned}$$

Gegeben ist nun die Zahl x^2, wir wollen x berechnen. Nach unserem Verfahren ziehen wir von x^2 die größte ganzzahlige Quadratzahl ab, das ist hier a^2:

$$\begin{aligned}x^2 - a^2 &= \Big(2a + \frac{b}{10}\Big)\cdot\frac{b}{10} + \Big(2a + 2\frac{b}{10} + \frac{c}{100}\Big)\cdot\frac{c}{100} \\ &= \Big(2a + \frac{b}{10}\Big)\cdot\frac{b}{10} + \ldots\end{aligned}$$

Dann holen wir zwei Nachkommastellen herunter. Das bedeutet, dass mit 100 multipliziert wird:

$$100(x^2 - a^2) \;=\; 100\Big(\Big(2a + \frac{b}{10}\Big)\cdot\frac{b}{10} + \ldots\Big) \;=\; \Big(20a + b\Big)\cdot b + \ldots$$

Um b zu erhalten, müssen wir also $100(x^2 - a^2)$ durch $20a + b$ teilen, und es soll $b + \ldots = b, \ldots,$ d.h. b oder etwas mehr als b herauskommen. Nun ziehen wir $(20a+b)\cdot b$ von $100(x^2 - a^2)$ ab:

$$100(x^2 - a^2) - (20a+b)\cdot b \;=\; 100\Big(2a + 2\frac{b}{10} + \frac{c}{100}\Big)\cdot\frac{c}{100} \;=\; \Big(2a + 2\frac{b}{10} + \frac{c}{100}\Big)\cdot c$$

Im nächsten Schritt holen wir die nächsten zwei Nachkommastellen von x^2 herunter, multiplizieren also wieder mit 100:

$$100\big(100(x^2 - a^2) - (20a+b)\cdot b\big) \;=\; 100\Big(2a + 2\frac{b}{10} + \frac{c}{100}\Big)\cdot c \;=\; \Big(200a + 20b + c\Big)c.$$

Das Ergebnis müssen wir, um c zu erhalten, durch $200a + 20b + c$ teilen, und es soll c oder etwas mehr als c herauskommen. Hier geht die Rechnung exakt auf, da wir angenommen haben, dass x zwei Nachkommastellen besitzt. Der letzte Schritt in unserem Verfahren

$$100\big(100(x^2 - a^2) - (20a+b)\cdot b\big) - (200a + 20b + c)c \;=\; 0$$

liefert als Ergebnis 0, d.h. wir haben $\sqrt{x^2} = a, bc$ berechnet.